

# Группа Старт. Первая лига. Финал

25 сентября

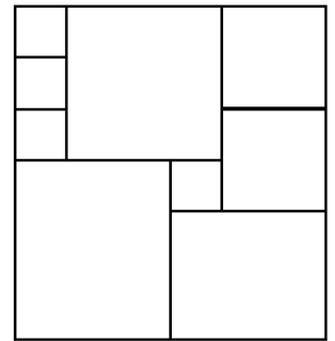
1. Число  $X$ , не обязательно целое, назовём *любопытным*, если стерев одну из цифр в его десятичной записи, можно получить число  $2X$ . Найдите наибольшее любопытное число.

2. На доске  $5 \times 5$  стоят 10 фишек. Если в каком-то квадрате  $3 \times 3$  стоит ровно одна фишка, её можно снять с доски. Докажите, что все фишки снять не удастся, как бы фишки не стояли вначале.

3. Докажите, что для любого натурального  $K < 1000$  среди 10-значных чисел, в записи которых есть только 1 и 2, есть ровно одно число, дающее остаток  $K$  при делении на 1024.

4. На каждой стороне треугольника отмечено по точке, а внутри треугольника — точка  $P$ . Точку  $P$  соединили с вершинами и отмеченными точками на сторонах. Могут ли все шесть образовавшихся треугольников быть равнобедренными?

5. Квадрат разбит на 9 частей так, как представлено на рисунке. Рисунок может быть неточным, но схема разбиения именно такая. Известно, что восемь частей являются квадратами, причём внутренняя — квадратик со стороной 1. Какие размеры могут быть у девятой части?



6. Все цифры натурального числа  $N$  различны. Известно, что если поменять местами любые две цифры, между которыми ровно одна другая, то число  $N$  увеличится, а если поменять местами любые две цифры, между которыми ровно две другие — уменьшится. Найдите такое наибольшее  $N$ .

7. Пусть  $A < B < C < D < E$  — пять вещественных чисел. Посчитали все возможные суммы двух из этих чисел, и они оказались различны. Из этих 10 сумм три наименьшие — 32, 36, 37, в то время как две наибольшие — 48 и 51. Определите все возможные значения, которые может принимать число  $E$ .

8. Имеется десять монет, девять из которых обычные и весят одинаково, а десятая — волшебная. Волшебная монета может находиться в двух состояниях: легком, когда она легче обыкновенной, и тяжелом, когда она тяжелее обыкновенной. После каждого взвешивания с ее участием волшебная монета меняет свое состояние на противоположное. Как за три взвешивания найти волшебную монету на чашечных весах без гирь?