Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2017
Юниор-лига. Финал. 25.09.17

1. Петя написал последовательность различных целых чисел и назвал её универсальной. Оказалось, что, какую бы последовательность длины 10 из знаков $>$ или $<$ ни написал его друг Вася, Петя может выбрать из своей универсальной последовательности 11-членную подпоследовательность, у которой между соседними членами стоят именно такие знаки, как написал Вася, и в том же порядке. Какую наименьшую длину может иметь универсальная последовательность?

2. Найдите все натуральные n такие, что $4^n + 6^n + 9^n$ – квадрат натурального числа.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Окружности S_1 и S_2 проходят через точку D и касаются описанной окружности треугольника AEF в точках E и F соответственно. Докажите, что точка пересечения S_1 и S_2, отличная от D – буде таковая найдётся – лежит на BC.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из D на прямые AB и AC. Докажите, что треугольник APQ и четырёхугольник $BCQP$ равновелики тогда и только тогда, когда центр описанной окружности ABC лежит на PQ.

5. Дано конечное множество натуральных чисел C. Назовём *простыми разностями* целые числа, которые можно получить, вычтя из какого-нибудь элемента C целое неотрицательное число, в десятичной записи которого не более 10 цифр, и все они – нули и единицы (например, 1010101010, 110 или 0). *Сложными разностями* назовём целые числа, которые можно получить, вычтя из какого-нибудь элемента C целое неотрицательное число, в десятичной записи которого не более 10 цифр, и все они – нули, единицы, двойки и тройки (например, 1230002 или 0). Докажите, что количество сложных разностей превосходит количество простых разностей не более, чем в 1024 раза.

6. Произведение любых двух из положительных действительных чисел a, b, c не превосходит 4. Докажите неравенство $a + b + c + 2 \geqslant abc$.

7. $p > 5$ — простое число. Докажите, что найдутся натуральные m и n такие, что $m+n < p$ и $2^m \cdot 3^n - 1$ делится на p.

8. На доске 13×13 стоят 50 фишек. Если в каком-то квадрате 7×7 стоит ровно одна фишка, её можно снять с доски. Докажите, что все фишки снять не удастся, как бы фишки ни стояли изначально.