Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Командная олимпиада. 19.09.2018
Команды 10–11 классов.

1. Для положительных чисел x и y, произведение которых равно 1, докажите равенство

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+x+y}=1.$$

2. Решите в натуральных числах уравнение $11x^2+14y^2=5z^2$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB катет BC длиннее катета AC. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C. Окружность радиуса CD с центром D пересекает катет BC в точке Q, гипотенузу AB в точке F, а продолжение AB — в точке E. Отрезок QE пересекает катет AC в точке P. Докажите, что $PE=QF$.

4. В круговом турнире по настольному теннису (каждые двое спортсменов сыграли ровно одну партию; ничьих не бывает) участвовали европейские и азиатские спортсмены, причём европейских было вдвое больше. Оказалось, что количество побед, одержанных азиатскими спортсменами, в $9/7$ раз больше, чем количество побед, одержанных европейскими. Сколько всего спортсменов могло участвовать в турнире?

5. Остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H вписан в окружность ω с центром O. Прямая d проходит через H и пересекает меньшие дуги AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть AA' — диаметр окружности ω. Прямые $A'P$ и $A'Q$ пересекают BC в точках K и L соответственно. Докажите, что точки O, K, L и A' лежат на одной окружности.

6. Для данного вещественного $x>1$ определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ условиями

$$x_1=x \qquad \text{и} \qquad x_{n+1}=\frac{1}{1-x_n}-\frac{1}{1+x_n} \quad \text{при } n\geqslant 1;$$

если $x_n=\pm 1$, на n-м члене последовательность заканчивается. Сколько существует значений $x>1$, для которых последовательность заканчивается ровно на 1000-м члене?

7. Каждая клетка бесконечной клетчатой доски окрашена в один из n данных цветов. Все 231 клеток любого прямоугольника 11×21 (или 21×11) имеют разные цвета. При каком наименьшем значении n возможна такая раскраска?

8. Назовём натуральное число n *фантастическим*, если оно представимо в виде

$$n=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}$$

при некоторых положительных рациональных a и b. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, которые являются делителями каких-то фантастических чисел.