Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Тур 1. 20.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. По кругу расставлены $2n+1$ точек: n белых, n красных и одна чёрная. Докажите, что можно соединить $2n$ из этих точек n непересекающимися отрезками так, чтобы ни один из отрезков не соединял белую и красную точки.

2. Числа $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2018}$ выписаны друг за другом в строчку. На какую наибольшую степень двойки делится получившееся число?

3. Дано натуральное число n. Пусть k — минимальное такое число, что среди чисел от $n+3$ до $n+k$ найдётся кратное k ($k>2$). Докажите, что k — произведение двух простых или степень простого.

4. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH. F — точка пересечения прямых EH и AC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB.

5. На плоскости даны точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой ℓ. На прямой ℓ всевозможными способами выбираются точки P и Q такие, что $\angle PAQ = 90^\circ$. Докажите, что все описанные окружности получающихся треугольников BPQ имеют общую точку, отличную от B.

6. При каких m и n прямоугольник $m \times n$ можно разбить на равное количество квадратов 2×2 и 1×1?

7. Попрыгунья-стрекоза прыгает по натуральным числам. В первый день она может прыгнуть на любое натуральное число. Дальше каждый день она прыгает на другое число, не превосходящее удвоенного предыдущего. Докажите, что стрекоза может бесконечно долго прыгать так, чтобы ни разу не попасть на число, у которого такая же сумма цифр, как у одного из предыдущих.

8. Найдите наибольшее x такое, что неравенство

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n} \geqslant x$$

выполняется при любых натуральных $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$, удовлетворяющих условию $a_1+\ldots+a_n = 2(b_1+\ldots+b_n)$.

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Тур 1. 20.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. По кругу расставлены $2n+1$ точек: n белых, n красных и одна чёрная. Докажите, что можно соединить $2n$ из этих точек n непересекающимися отрезками так, чтобы ни один из отрезков не соединял белую и красную точки.

2. Числа $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2018}$ выписаны друг за другом в строчку. На какую наибольшую степень двойки делится получившееся число?

3. Дано натуральное число n. Пусть k — минимальное такое число, что среди чисел от $n+3$ до $n+k$ найдётся кратное k ($k > 2$). Докажите, что k — произведение двух простых или степень простого.

4. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH. F — точка пересечения прямых EH и AC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB.

5. На плоскости даны точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой ℓ. На прямой ℓ всевозможными способами выбираются точки P и Q такие, что $\angle PAQ = 90^\circ$. Докажите, что все описанные окружности получающихся треугольников BPQ имеют общую точку, отличную от B.

6. При каких m и n прямоугольник $m \times n$ можно разбить на равное количество квадратов 2×2 и 1×1?

7. Попрыгунья-стрекоза прыгает по натуральным числам. В первый день она может прыгнуть на любое натуральное число. Дальше каждый день она прыгает на другое число, не превосходящее удвоенного предыдущего. Докажите, что стрекоза может бесконечно долго прыгать так, чтобы ни разу не попасть на число, у которого такая же сумма цифр, как у одного из предыдущих.

8. Найдите наибольшее x такое, что неравенство

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant x$$

выполняется при любых натуральных $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, удовлетворяющих условию $a_1 + \ldots + a_n = 2(b_1 + \ldots + b_n)$.