Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Тур 2. 21.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Из восьми вершин куба по рёбрам поползли 8 муравьёв. Каждый муравей может ползать по рёбрам как угодно с единственным ограничением — никогда не превышать скорости 1 ребро в минуту. Через время t после начала движения оказалось, что к этому моменту каждая пара муравьев уже встречалась (оказывалась в одной точке). Найдите наименьшее возможное значение t.

2. Сумма цифр натурального числа n равна сумме цифр числа n^2. Найдите все значения, которые эта сумма может принимать.

3. Даны натуральное $n > 2$ и простое p. Докажите, что если $n^3 - 8$ делится на p и $p - 4$ делится на n, то $p - 3$ — точный квадрат.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. На лучах BC и AB выбраны точки A_1 и C_1 соответственно так, что $BC_1 = CC_1$ и $BA_1 = AA_1$. Пусть M — середина стороны AC, а H — основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B. Докажите, что середина отрезка A_1C_1 равноудалена от точек M и H.

5. Точка P лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Точки D, E и F — основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны ABC. На шести отрезках, на которые эти точки разбивают стороны треугольника как на основаниях построены квадраты вне треугольника ABC. Эти квадраты попеременно раскрашены в красный и зелёный цвета. Рассмотрим два треугольника, образованных прямыми, содержащими "внешние" стороны квадратов одного цвета. Докажите, что эти треугольники равны.

6. Дано натуральное число $1 < n < 2018$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ определим квадратный трёхчлен $S_i(x) = x^2 - 2018x + l_i$, где $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — различные натуральные числа. Известно, что трёхчлен

$$S_1(x) + S_2(x) + \ldots + S_n(x)$$

имеет целый корень. Докажите, что найдётся такое i, что $l_i \geq 2018$.

7. Одиннадцать человек сыграли однокруговой турнир по теннису. Обозначим количество выигранных ими игр как $a_1, \ldots a_{11}$. Какое наибольшее значение может быть у выражения $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{11}^3$?

8. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{a+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geqslant 1$$

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Тур 2. 21.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Из восьми вершин куба по рёбрам поползли 8 муравьёв. Каждый муравей может ползать по рёбрам как угодно с единственным ограничением — никогда не превышать скорости 1 ребро в минуту. Через время t после начала движения оказалось, что к этому моменту каждая пара муравьев уже встречалась (оказывалась в одной точке). Найдите наименьшее возможное значение t.

2. Сумма цифр натурального числа n равна сумме цифр числа n^2. Найдите все значения, которые эта сумма может принимать.

3. Даны натуральное $n > 2$ и простое p. Докажите, что если $n^3 - 8$ делится на p и $p - 4$ делится на n, то $p - 3$ — точный квадрат.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. На лучах BC и AB выбраны точки A_1 и C_1 соответственно так, что $BC_1 = CC_1$ и $BA_1 = AA_1$. Пусть M — середина стороны AC, а H — основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B. Докажите, что середина отрезка A_1C_1 равноудалена от точек M и H.

5. Точка P лежит внутри остроугольного треугольника ABC. Точки D, E и F — основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны ABC. На шести отрезках, на которые эти точки разбивают стороны треугольника как на основаниях построены квадраты вне треугольника ABC. Эти квадраты попеременно раскрашены в красный и зелёный цвета. Рассмотрим два треугольника, образованных прямыми, содержащими "внешние" стороны квадратов одного цвета. Докажите, что эти треугольники равны.

6. Дано натуральное число $1 < n < 2018$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ определим квадратный трёхчлен $S_i(x) = x^2 - 2018x + l_i$, где $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — различные натуральные числа. Известно, что трёхчлен

$$S_1(x) + S_2(x) + \ldots + S_n(x)$$

имеет целый корень. Докажите, что найдётся такое i, что $l_i \geq 2018$.

7. Одиннадцать человек сыграли однокруговой турнир по теннису. Обозначим количество выигранных ими игр как $a_1, \ldots a_{11}$. Какое наибольшее значение может быть у выражения $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{11}^3$?

8. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{a+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geqslant 1$$