Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2018
Премьер-лига. 3 тур. 22.09.18

1. Рассмотрим множество V строк длины n, состоящих из чисел -1, 0 или 1. Известно, что никакие три строки из V не дают нулевую строку при почленном сложении. Докажите, что в V входит не более $2 \cdot 3^{n-1}$ таких строк.

2. Обозначим через F_n n-ое число Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), и определим последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ следующим образом: пусть $a_0 = 100$, и для всех $k > 0$ определим $a_{k+1} = a_k + F_n$, где F_n — наибольшее число Фибоначчи, меньшее чем a_k. Встретится ли в этой последовательности какое-нибудь число Фибоначчи?

3. AD — биссектриса треугольника ABC. Обозначим через E и F центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Оказалось, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на стороне BC. Чему может быть равен угол BAC?

4. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ такие, что $a_{2018}^2 + a_{2017}^2 = a_{2016}^2 - a_{2015}^2 + a_{2014}^2 - \dots + a_2^2 - a_1^2$. Докажите, что число $A = a_1 a_2 \dots a_{2018} + 2025$ представимо в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

5. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f(x^2 + xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

6. Клетки доски 100×100 раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. *Слоновья тропа* – это последовательность различных клеток, в которой каждые две последовательные клетки имеют ровно одну общую точку. На какое наименьшее количество слоновьих троп можно разбить все белые клетки?

7. Точка O — центр описанной окружности, а точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Точка F на стороне AB выбрана таким образом, что $OF \| BC$. Точка M — середина отрезка AH. Докажите, что $\angle FMC = 90^\circ$.

8. Даны вещественные числа x, y такие, что числа $x - y$, $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$ – простые. Докажите, что $x - y = 3$.