

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №1. 22.09.2019. СТАРТ-ЛИГА ВЫСШАЯ

1. Корабль и подводная лодка одновременно отплыли на учения от одного причала и следуют в одном направлении с различными постоянными скоростями: корабль — на поверхности, а лодка — под кораблём на глубине 30 м. Через час после старта расстояние между лодкой и кораблём равнялось 70 м. На каком расстоянии друг от друга будут лодка и корабль через 2 часа после старта? (Корабль и лодку считайте точками.)

2. В пещере на острове Сааремаа медитируют три монаха, каждый из которых лжёт по двум подряд идущим дням недели и говорит правду по остальным дням. Ни в один день недели не лжёт больше чем один монах. В понедельник один монах говорит: «Вчера я лгал.» На следующий день другой монах отвечает: «Интересное совпадение, и я вчера лгал.» В какой день недели не лжёт ни один монах?

3. На полоске из 2019 клеток на каждой клетке лежит монета орлом вверх. Можно указать любые пять клеток, идущих подряд, после чего на всех этих клетках, кроме центральной, монеты переворачиваются. Сколько разных комбинаций расположения монет можно получить такими действиями?

4. Существует ли такое натуральное число a , что $a \cdot 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 4$ — точный квадрат?

5. У ювелира есть 5 алмазов и весы со стрелкой, показывающие разность весов камней, положенных на чашки. Ювелир сравнил веса каждой пары алмазов. Восемь из десяти результатов оказались равны: 1 г, 1 г, 2 г, 2 г, 3 г, 3 г, 3 г, 4 г. Найдите две недостающие разности.

6. Фигуры «лодочка» и «кораблик» состоят из правильных треугольников со стороной 1 (см. рисунок ниже). Можно ли правильный треугольник со стороной 30 разрезать на 20 лодочек и 140 корабликов? (Фигурки можно поворачивать.)



7. Вова задумал 2019 натуральных чисел с суммой K . Для каких натуральных K гарантированно существует связный граф с 2019 вершинами, степени которых равны задуманным числам?

8. Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 1$ и

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

при $n > 1$. Найдите все n , для которых a_n делится на $n!$.

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №1. 22.09.2019. СТАРТ-ЛИГА ПЕРВАЯ

1. Одну сторону прямоугольного параллелепипеда удлинили на 20%, а другую — укоротили на 20%. На сколько процентов и в какую сторону надо изменить третью сторону параллелепипеда, чтобы его объём не изменился?

2. В пещере на острове Сааремаа медитируют три монаха, каждый из которых лжёт по двум подряд идущим дням недели и говорит правду по остальным дням. Ни в один день недели не лжёт больше чем один монах. В понедельник один монах говорит: «Вчера я лгал.» На следующий день другой монах отвечает: «Интересное совпадение, и я вчера лгал.» В какой день недели не лжёт ни один монах?

3. На полоске из 2019 клеток на каждой клетке лежит монета орлом вверх. Можно указать любые три клетки, идущие подряд, после чего на всех этих клетках монеты переворачиваются. Сколько разных комбинаций расположения монет можно получить такими действиями?

4. Существует ли такое натуральное число a , что $a \cdot 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 4$ — точный квадрат?

5. У ювелира есть 5 алмазов и весы со стрелкой, показывающие разность весов камней, положенных на чашки. Ювелир сравнил веса каждой пары алмазов. Восемь из десяти результатов оказались равны: 1 г, 1 г, 2 г, 2 г, 3 г, 3 г, 3 г, 4 г. Найдите две недостающие разности.

6. Фигуры «лодочка» и «кораблик» состоят из правильных треугольников со стороной 1 (см. рисунок ниже). Можно ли правильный треугольник со стороной 30 разрезать на 20 лодочек и 140 корабликов? (Фигурки можно поворачивать.)



7. Вова задумал 111 натуральных чисел с суммой 220. Обязательно ли существует связный граф с 111 вершинами, степени которых равны задуманным числам?

8. Найдите наибольшее число слагаемых TOP, которое может быть в ребусе

$$\text{TOP} + \text{TOP} + \dots + \text{TOP} = \text{ОВАЛ}.$$

(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные, и ни одно число не начинается с нуля.)