Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Тур 1. 22.09.2019
Высшая юниорская лига (9 класс).

1. Целые положительные числа a, b и c таковы, что $[a, c]$ делится на b, а $[b, c]$ делится на a. Докажите, что $b(a, c) = a(b, c)$. (Здесь $[x, y]$ и (x, y), как обычно, обозначают наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел x и y соответственно.)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Прямая перпендикулярная AD, проведенная через точку B, пересекает отрезок AD и вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Докажите, что точки A, E и центр описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

3. Различные ненулевые вещественные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}.$$

Докажите, что

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

4. Вова придумал 2019 натуральных чисел с суммой равной K. Для каких натуральных K гарантировано существует связный граф с 2019 вершинами, степени которых равны данным числам?

5. Точки M и N – середины сторон BC и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что

$$AB + CD \leqslant \max(AM + DM, BN + CN).$$

6. Положительные числа a, b, c меньше 1. Докажите, что

$$a + b + c + 2abc > ab + bc + ca + 2\sqrt{abc}.$$

7. Какое наибольшее количество вершин правильного 120-угольника можно отметить, чтобы никакие три отмеченные вершины не образовывали равнобедренный треугольник с углами $18°, 81°, 81°$?

8. Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 1$ и

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

при $n > 1$. Найдите все n, для которых a_n делится на $n!$.

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Тур 1. 22.09.2019
Первая юниорская лига (9 класс).

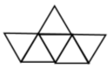
1. Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 1$ и

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

при $n > 1$. Найдите все n, для которых a_n делится на $n!$.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Прямая перпендикулярная AD, проведенная через точку B, пересекает отрезок AD и вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Докажите, что точки A, E и центр описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

3. Фигуры «лодочка» и «кораблик» состоят из правильных треугольников со стороной 1 (см. рисунок ниже: «лодочка» справа, «кораблик» слева). Можно ли правильный треугольник со стороной 30 разрезать на 20 лодочек и 140 корабликов? (Фигурки можно поворачивать.)



4. Существует ли такое натуральное n, что число $n \cdot 2015 \cdot 2017 \cdot 2019 + 4$ является точным квадратом?

5. $ABCD$ — равнобедренная трапеция ($AD||BC$). N — точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне AB с прямой BC. Оказалось, что $AN||CD$. Найдите углы трапеции.

6. Целые положительные числа a, b и c таковы, что $[a, c]$ делится на b, а $[b, c]$ делится на a. Докажите, что $b(a, c) = a(b, c)$. (Здесь $[x, y]$ и (x, y), как обычно, обозначают наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел x и y соответственно.)

7. В пещере на острове Сааремаа медитируют три монаха, каждый из которых лжёт по двум подряд идущим дням недели и говорит правду по остальным дням. Ни в один день недели не лжёт больше чем один монах. В понедельник один монах говорит: “Вчера я лгал.” На следующий день другой монах отвечает: “Интересное совпадение, и я вчера лгал.” В какой день недели не лжёт ни один монах?

8. Различные ненулевые вещественные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}.$$

Докажите, что

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$