Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №2. 23.09.2019. СТАРТ-ЛИГА ВЫСШАЯ

1. Дано натуральное число n. Петя и Вася играют в следующую игру на клетчатой полоске длины 2019. Вася ставит фишку на какое-то поле. Далее на каждом шаге Петя выбирает натуральное число k, не большее n, а Вася двигает фишку на k клеток вправо или влево по своему выбору. Петя выигрывает, если Вася не может сделать очередной ход. Найдите наименьшее n, при котором Петя может играть так, чтобы гарантированно выиграть за конечное количество ходов.

2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AX и BY. Перпендикуляры к прямой XY, проведённые через точки X и Y, пересекают сторону AB в точках M и N соответственно. Докажите, что $AN = MB$.

3. На контурную карту нанесены 10 городов (без названий) и железные дороги между некоторыми из них. Незнайке задали нанести на карту названия городов, но выдали только список пар городов, напрямую соединенных железной дорогой. По его словам, этого хватило, чтобы однозначно установить название каждого города. Могут ли слова Незнайки быть правдой?

4. Разрежьте квадрат со стороной 8 см на восемь фигур, для каждой из которых отношение ее площади к периметру равно 0,5 см.

5. Назовём натуральное число n *хорошим*, если набор чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n$ можно разбить на пары, сумма чисел в каждой из которых на 1 меньше степени двойки (не обязательно одной и той же). Найдите все хорошие числа.

6. Треугольник спроектировали на прямые, параллельные его сторонам, и получили три отрезка длиной a, b и c. Известно, что по числам a, b, c длины сторон треугольника однозначно восстанавливаются. Чему может быть равен его наибольший угол?

7. У натурального числа $n > 10$ есть два различных натуральных делителя a и b таких, что $n = a^2 + b$. Докажите, что между a и b найдется еще хотя бы один делитель числа n.

8. В классе любые два ученика имеют разный рост. Учитель физкультуры построил всех учеников класса в шеренгу так, что среди любых трёх подряд стоящих в шеренге учеников левый оказывается всегда по росту между средним и правым. После команды «каждому второму ученику сделать шаг вперёд» образуются две шеренги. Докажите,что обе эти шеренги упорядочены по росту.

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №2. 23.09.2019. СТАРТ-ЛИГА ПЕРВАЯ

1. По кругу стоят 100 человек, рыцарей и лжецов, занумерованных в некотором порядке числами $1, 2, 3, \ldots, 99, 100$. Каждый заявил: «Номер хотя бы одного моего соседа — простое число». Какое наибольшее число рыцарей могло быть среди них?

2. Все целые числа от 1 до N покрасили в два цвета: синий и красный так, что сумма всех синих чисел равна сумме всех красных. Оказалось, что никакая сумма двух красных чисел не равна синему числу и никакая сумма двух синих чисел не равна красному числу. Найдите N.

3. На контурную карту нанесены десять городов (без названий) и железные дороги между некоторыми из них. Незнайке задали нанести на карту названия городов, но выдали только список пар городов, напрямую соединенных железной дорогой. По его словам, этого хватило, чтобы однозначно установить название каждого города. Могут ли слова Незнайки быть правдой?

4. Разрежьте клетчатый квадрат 8×8 на две клетчатые фигуры, для каждой из которых отношение её площади к периметру равно $1/2$.

5. Назовем натуральное число n *хорошим*, если набор чисел $1, 2, 3, \ldots, 2n$ можно разбить на пары, сумма чисел в каждой из которых есть степень двойки (не обязательно одной и той же). Найдите все хорошие числа.

6. Из трёх палочек можно сложить треугольник. От каждой палочки отломили по куску и сложили из этих кусков другой треугольник. Обязательно ли из оставшихся частей тоже можно сложить треугольник?

7. У натурального числа $n > 10$ есть два различных натуральных делителя a и b таких, что $n = a^2 + b$. Докажите, что между a и b найдется еще хотя бы один делитель числа n.

8. В классе любые два ученика имеют разный рост. Учитель физкультуры построил всех учеников класса в шеренгу так, что среди любых трёх подряд стоящих в шеренге учеников левый оказывается всегда по росту между средним и правым. После команды «каждому второму ученику сделать шаг вперёд» образуются две шеренги. Докажите,что обе эти шеренги упорядочены по росту.