Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Тур 2. 23.09.2019
Высшая юниорская лига (9 класс).

1. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB > AC$, и выберем точку Q на стороне AB так, что $BQ = AC$. Пусть Γ — окружность, проходящая через точку Q и касающаяся прямой AC в точке A. Пусть X — вторая точка пересечения Γ с описанной окружностью треугольника ABC. Пусть T — точка на луче CA такая, что A лежит между C и T. Докажите, что прямая XA является биссектрисой угла TAB.

2. В связном графе на n вершинах при удалении любых двух ребер, имеющих общую вершину, связность нарушается. Какое наибольшее количество ребер может быть в этом графе?

3. Сумма нескольких натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 10, не превосходит S. Найдите максимальное S такое, что эти числа гарантированно можно разбить на две группы, в каждой из которых сумма не превосходит 70.

4. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AB = NB$, $AC = MC$. Пусть X такая точка внутри треугольника ABC, что треугольник MNX — равнобедренный прямоугольный с прямым углом X. Найдите угол BXC.

5. Дано натуральное n. Найдите все натуральные делители d числа $3n^2$ такие, что $n^2 + d$ — квадрат натурального числа.

6. Найдите все натуральные n, m такие, что число $\frac{n+1}{4n+2} + \frac{3m+4}{2m+2}$ — целое.

7. Дано 2019 различных целых чисел и простое число p такое, что для любого из этих чисел все его простые нечетные делители не меньше p. Для какого минимального p можно гарантировать, что среди них найдется два числа a и b таких, что все простые нечетные делители $a + b$ тоже не меньше p.

8. Для положительных x, y, z, произведение которых равняется 1, докажите неравенство

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \geqslant 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right).$$

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Тур 2. 23.09.2019
Первая юниорская лига (9 класс).

1. Дано натуральное число n. Петя и Вася играют в следующую игру в прямоугольнике 1×2018. Вася ставит фишку на какое-ту клетку. Далее на каждом шаге Петя называет натуральное число k, не большее n, и Вася двигает фишку на k клеток вправо или влево по своему выбору. Петя выигрывает, если Вася не может сделать очередной ход. Найдите наименьшее n, при котором Петя может играть так, чтобы гарантированно выиграть за конечное количество ходов.

2. В связном графе на n вершинах при удалении любых двух ребер, не имеющих общую вершину, связность нарушается. Какое максимальное количество ребер может быть в этом графе?

3. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AB = NB$, $AC = MC$. Пусть X такая точка внутри треугольника ABC, что треугольник MNX — равнобедренный прямоугольный с прямым углом X. Найдите угол BXC.

4. У натурального числа $n > 10$ есть два различных делителя a и b таких, что $n = a^2 + b$. Докажите, что между a и b найдется еще хотя бы один делитель числа n.

5. Найдите все натуральные n, m такие, что число $\frac{n+1}{4n+2} + \frac{3m+4}{2m+2}$ — целое.

6. Дано 2019 различных целых чисел таких, что для любого из них все его простые нечетные делители не меньше 37. Докажите, что среди них найдется два числа a и b таких, что все нечетные простые делители $a+b$ тоже не меньше 37.

7. Выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежит внутри другого выпуклого шестиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, причем соответствующие стороны шестиугольников параллельны. Докажите, что площади несамопересекающихся шестиугольников $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ и $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ равны.

8. Для положительных x, y, z, произведение которых равняется 1, докажите неравенство

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \geqslant 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right).$$