Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орленок», 20–28.09.2019

Бой № 3. 25.09.2019. Лига Гранд.

1. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается сторон AC и AB в точках B_1 и C_1. Прямая B_1C_1 пересекает BC в точке X, а внешняя биссектриса угла BAC пересекает BC в точке Y. Докажите, что биссектрисы углов BIC и XIY перпендикулярны.

2. Даны простые числа p и q. Известно, что $p+q^2$ является точным квадратом. Докажите, что ни при каком натуральном n число p^2+q^n не является точным квадратом.

3. Найдите наименьшее целое $k \geq 3$, обладающее таким замечательным свойством: если a, b, c, d, n — натуральные числа такие, что обе суммы $a+b+c+d$ и $a^2+b^2+c^2+d^2$ делятся на n, то $a^k+b^k+c^k+d^k$ также делится на n.

4. На бесконечной клетчатой доске клетки покрашены в черный и белый цвет в шахматном порядке. Клетчатый многоугольник назовем *красивым*, если он сотоит из 1009 белых и 1009 черных клеток. Найдите наибольшее натуральное k, удовлетворяюшее следующему условию: из любого красивого многоугольника можно вырезать k (непересекающихся) доминошек 1×2.

5. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{Q}$ выполнено равенство $2f(f(x)) = f(2x)$ и для любого ненулевого $x \in \mathbb{Q}$ выполнено равенство $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 1$.

6. Найдите все натуральные $n > 4$, для которых верно такое утверждение: в любой триангуляции выпуклого n-угольника P найдется диагональ, которая делит P на четырехугольник и $(n-2)$-угольник?

7. Двум мудрецам втайне один от другого сообщат по натуральному числу. Мудрецам известно, что сумма их чисел будет равна 2^k-1, где k — какое-то неизвестное им натуральное число. Далее первый мудрец скажет второму «1» или «2», а затем второй скажет первому «1» или «2». Цель каждого мудреца — узнать, больше или меньше его число, чем число другого. Как мудрецам заранее договориться, чтобы оба добились своей цели?

8. Пусть I и r – центр вписанной окружности треугольника и её радиус, а H — ортоцентр. Рассмотрим окружность ω с центром в I и радиусом $r\sqrt{2}$. Докажите, что треугольник остроугольный тогда и только тогда, когда H лежит внутри ω.

9. Дано натуральное число k. На координатной плоскости проведены k прямых $a_ix+b_iy=1$, где $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, не проходящих через целые точки. Какое наибольшее количество из 10000 единичных квадратиков квадрата $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 100$ может разрезать объединение этих прямых?

10. Можно ли разместить на плоскости 100 кругов $D_2, D_3, \ldots, D_{101}$ так, чтобы для любых различных a и b, больших 1 и не больших 101, круги D_a и D_b не пересекались, если НОД$(a, b) = 1$, и круг D_a содержал круг D_b, если a делится на b?