Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №3. 25.09.2019. СТАРТ-ЛИГА ВЫСШАЯ

1. Каждый болельщик «Спартака» из зашедших в спорт-бар знает ровно две кричалки и ровно с одним другим болельщиком у него нет общей кричалки. Сколько всего болельщиков «Спартака» могло зайти в спорт-бар?

2. На плоскости расположена невидимая фигура: либо треугольник, либо выпуклый четырёхугольник. Разрешается провести прямую, и вам нарисуют на ней проекцию фигуры на эту прямую. Всегда ли за несколько (конечное число) таких действий можно выяснить, какой именно из этих двух случаев имеет место?

3. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём

$$\frac{a^2-a-c}{b}+\frac{b^2-b-c}{a}=a+b+2.$$

Докажите, что $a+b+c$ — точный квадрат.

4. На плоскости отмечены три точки, не лежащие на одной прямой. С помощью циркуля и линейки определите, существует ли хотя бы один треугольник, у которого одна из этих точек — середина какой-то его стороны, а две другие — основания высот на других сторонах треугольника.

5. На новогоднем утреннике каждый мальчик подарил каждой девочке по одной конфете и каждая девочка подарила каждому мальчику по одной конфете. 7 детей дарили только «Белочки», а остальные — только «Коровки», причём «Белочек» и «Коровок» подарено было поровну. Известно также, что среди даривших «Белочки» были и мальчики, и девочки. Определите наибольшее возможное число участников утренника.

6. Два отрезка с концами на сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проходят через точку пересечения его диагоналей и оба делятся этой точкой пополам. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

7. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых $2^{a!}+2^{b!}$ — точный куб.

8. Двум мудрецам втайне один от другого сообщат по натуральному числу. Мудрецам известно, что сумма их чисел будет равна 2^k-1, где k — какое-то неизвестное им натуральное число. Узнав каждый своё число, мудрецы должны будут одновременно поднять по одной руке. Цель мудреца — увидев, какую руку поднял другой (левую или правую), узнать, больше или меньше его число, чем число другого. Как мудрецам заранее договориться, чтобы оба добились своей цели?

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №3. 25.09.2019. СТАРТ-ЛИГА ПЕРВАЯ

1. Каждый болельщик «Спартака» из зашедших в спорт-бар знает ровно две кричалки и ровно с одним другим болельщиком у него нет общей кричалки. Сколько всего болельщиков «Спартака» могло зайти в спорт-бар?

2. На плоскости расположена невидимая фигура: либо отрезок, либо треугольник. Разрешается провести прямую, и вам нарисуют на ней проекцию фигуры на эту прямую. За несколько (конечное число) таких действий выясните, какой именно из этих двух случаев имеет место.

3. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём

$$\frac{a^2-a-c}{b}+\frac{b^2-b-c}{a}=a+b+2.$$

Докажите, что $a+b+c$ — точный квадрат.

4. На плоскости отмечены три точки, не лежащие на одной прямой. С помощью циркуля и линейки определите, существует ли хотя бы один треугольник, у которого одна из этих точек — середина какой-то его стороны, а две другие — основания высот на других сторонах треугольника.

5. На хоккей пришло много болельщиков. Каждый болельщик «Локомотива» съел в буфете 2 бутерброда, 4 порции мороженого и выпил 4 стакана пепси-колы, а болельщик «Динамо» — 5 бутербродов, 4 порции мороженого и 6 стаканов пепси-колы. Всего было выпито 20000 стаканов пепси-колы. А сколько всего, считая вместе, бутербродов и мороженого было съедено?

6. Два отрезка с концами на сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проходят через точку пересечения его диагоналей и оба делятся этой точкой пополам. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

7. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых $2^{a!}+2^{b!}$ — точный куб.

8. По дорожке, проложенной вдоль контура квадрата, с разными скоростями прыгают три кузнечика. Один прыжок каждый из кузнечиков совершает за одну секунду. Самый быстрый кузнечик преодолевает сторону квадрата за 5 прыжков, второй — за 15 прыжков, а третий — за N прыжков (N — натуральное). Найдите N, если кузнечики встречаются только в вершинах квадрата.