Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Тур 3. 25.09.2019
Высшая юниорская лига (9 класс).

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, которые могут быть представлены хотя бы двумя различными способами в виде a^2-b, где a и b являются делителями числа n.

2. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону BC в точке K. Прямая, перпендикулярная CM и проходящая через точку K, пересекает луч CA в точке P (A лежит между C и P). Прямые CM и BP пересекаются в точке T. Докажите, что $AC = TB$.

3. На плоскости расположен невидимый выпуклый N-угольник. Неизвестно, чему равно N. Разрешается провести прямую, и вам покажут проекцию многоугольника на эту прямую. Можно ли гарантированно найти N за конечное число шагов?

4. Мария Ивановна несла в школу 2^k яблок, где k — целое неотрицательное число, но съела одно по дороге. Оставшиеся яблоки она раздала Васе и Пете в непрозрачных пакетах. Дети хотят узнать, кому досталось больше, но им нельзя разговаривать. Они заранее знали, что им раздадут 2^k-1 яблок для некоторого k, но не знали, чему равно k. Они договорились, что каждый, заглянув в свой пакет, тихонько почешет либо левое ухо, либо правое ухо в зависимости от того, что он найдёт в пакете. Как Васе и Пете с помощью такого обмена информацией узнать, у кого больше яблок (или что яблок у них поровну, если учительница съела единственное яблоко)?

5. Пусть $f(x) = x^2 + bx + 1$, где b — вещественное число. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $f(f(x) + x) < 0$ (при каждом значении параметра b)?

6. Пусть a, b, c — ненулевые вещественные числа, а x, y, z такие, что

$$bx + ay = c, \quad cx + az = b, \quad cy + bz = a.$$

Докажите, что $xyz > 0$ тогда и только тогда, когда a^2, b^2 и c^2 являются длинами сторон некоторого треугольника.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях стороны BC отмечены точки: на продолжении за точку B отмечена точка P, за точку C — точка Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Окружность ω с центром O является вневписанной для треугольника ABC, она касается продолжений сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Лучи PD и QE пересекаются в точке T (точка D лежит на отрезке PT, точка E лежит на отрезке QT). Докажите, что $\angle ATO = 90^\circ$.

8. Прямоугольник, состоящий из клеток шахматной доски, назовём *важным*, если все его угловые клетки чёрные. На каждой клетке шахматной доски написано количество важных прямоугольников, содержащих эту клетку. Пусть B – сумма чисел, написанных на чёрных клетках, а W – сумма чисел, написанных на белых клетках. Найдите $B - W$.

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Тур 3. 25.09.2019
Первая юниорская лига (9 класс).

1. Найти все натуральные числа a и b такие, что $2^{a!} + 2^{b!}$ — точный куб.

2. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону BC в точке K. Прямая, перпендикулярная CM и проходящая через точку K, пересекает луч CA в точке P (A лежит между C и P). Прямые CM и BP пересекаются в точке T. Докажите, что $AC = TB$.

3. Мария Ивановна несла в школу 2^k яблок, где k — целое неотрицательное число, но съела одно по дороге. Оставшиеся яблоки она раздала Васе и Пете в непрозрачных пакетах. Дети хотят узнать, кому досталось больше, но им нельзя разговаривать. Они заранее знали, что им раздадут $2^k - 1$ яблок для некоторого k, но не знали, чему равно k. Они договорились, что каждый, заглянув в свой пакет, тихонько почешет либо левое ухо, либо правое ухо в зависимости от того, что он найдёт в пакете. Как Васе и Пете с помощью такого обмена информацией узнать, у кого больше яблок (или что яблок у них поровну, если учительница съела единственное яблоко)?

4. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа, а x, y, z такие, что

$$bx + ay = c, \quad cx + az = b, \quad cy + bz = a.$$

Докажите, что $xyz \leqslant \frac{1}{8}$.

5. Назовем натуральное число $n > 3$ *круговым*, если можно поставить по кругу n натуральных чисел (не обязательно различных) так, чтобы произведение любых четырех подряд идущих равнялось n. Найдите количество круговых чисел n таких, что $3 < n < 1000000$.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях стороны BC отмечены точки: на продолжении за точку B отмечена точка P, за точку C — точка Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Окружность ω с центром O является вневписанной для треугольника ABC, она касается продолжений сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Лучи PD и QE пересекаются в точке T (точка D лежит на отрезке PT, точка E лежит на отрезке QT). Докажите, что $\angle ATO = 90^\circ$.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, которые могут быть представлены в виде $a^2 - b$, где a и b являются делителями числа n, хотя бы двумя различными способами.

8. Каждый болельщик «Спартака» из зашедших в спорт-бар знает ровно две кричалки. С любым другим болельщиком «Спартака», кроме одного, он может прокричать какую-то кричалку. Сколько всего болельщиков Спартака зашло в спорт-бар?