Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орленок», 20–28.09.2019

26.09.2019. Лига Гранд. Бой за 5–6 места.

1. Докажите, что если a и b – катеты прямоугольного треугольника, а c – его гипотенуза, то
$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \le \sqrt{2} + 2.$$

2. 99 гномов, некоторые из них – в шляпах, стали в круг. Оказалось, что два гнома в шляпах не могут стоять ни рядом, ни так, чтобы между ними стояло ровно 48 гномов. Какое наибольшее количество гномов может быть в шляпах?

3. На каждой клетке доски $m \times n$ лежит по одной монете. В правом верхнем углу монета лежит вверх орлом, а во всех остальных клетках – решкой. За ход разрешается убрать с доски любую монету, лежащую вверх орлом, и перевернуть монеты во всех клетках, соседних по стороне с клеткой, в которой лежала эта монета. При каких $m > 2$, $n > 2$ можно убрать с доски все монеты?

4. Можно ли расставить во всех клетках таблицы 2019×2019 попарно различные натуральные числа так, что для каждых двух клеток, граничащих по стороне, одно из двух чисел в этих клетках делится на другое, и притом наибольшее число в таблице превосходит наименьшее не более, чем в 2019 раз?

5. Пусть D — середина стороны BC неравнобедренного треугольника ABC. На отрезке AD взята точка P. Окружности (BDP) и (CDP) пересекают соответственно отрезки AB и AC в точках E и F соответственно. Точка Q — основание биссектрисы треугольника EPF, проведенной из P. Докажите, что окружность (APQ) касается высоты AH треугольника ABC.

6. При каком наименьшем натуральном $n \ge 2$ существуют натуральные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 1$ делится на $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$?

7. Окружность ω, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках K, L и M соответственно. Точки E и F симметричны точке K относительно точек A и B соответственно. Докажите, что прямые EM и FL пересекаются на ω.

8. Решите в натуральных числах уравнение $xy = x + y + \text{НОК}[x, y]$.

9. 2019 куч камней изначально по 1 камню. За одну операцию можно в некоторые 100 куч добавить по 100 камней и еще в несколько (возможно, ни в одну) из куч по одному камню. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы во всех кучах снова стало поровну камней?

10. Докажите, что любое рациональное число представимо в виде $x^4 + y^4 - z^4 - t^4$ для некоторых рациональных x, y, z, t.