Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орленок», 20–28.09.2019

26.09.2019. Лига Гранд. Полуфинал.

1. Пусть D — середина стороны BC неравнобедренного треугольника ABC. На отрезке AD взята точка P. Окружности (BDP) и (CDP) пересекают соответственно отрезки AB и AC в точках E и F соответственно. Точка Q — основание биссектрисы треугольника EPF, проведенной из P. Докажите, что окружность (APQ) касается высоты AH треугольника ABC.

2. Найдите наименьшее натуральное $n \geq 2$ такое, что существуют натуральные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1$ делится на $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

3. Докажите, что если a и b – катеты прямоугольного треугольника, а c – его гипотенуза, то
$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2} + 2.$$

4. Докажите, что любое рациональное число представимо в виде $x^4 + y^4 - z^4 - t^4$ для некоторых рациональных x, y, z, t.

5. Можно ли расставить во всех клетках таблицы 2019×2019 попарно различные натуральные числа так, что для каждых двух клеток, граничащих по стороне, одно из двух чисел в этих клетках делится на другое, и притом наибольшее число в таблице превосходит наименьшее не более, чем в 2019 раз?

6. Докажите, что для любого натурального k найдется натуральное n такое, что $1 + 2^n + 3^n$ делится на 7^k.

7. На каждой клетке доски $m \times n$ лежит по одной монете. В правом верхнем углу монета лежит вверх орлом, а во всех остальных клетках – решкой. За ход разрешается убрать с доски любую монету, лежащую вверх орлом, и перевернуть монеты во всех клетках, соседних по стороне с клеткой, в которой лежала эта монета. При каких $m > 2$, $n > 2$ можно убрать с доски все монеты?

8. 2019 куч камней изначально по 1 камню. За одну операцию можно в некоторые 100 куч добавить по 100 камней и еще в несколько (возможно, ни в одну) из куч по одному камню. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы во всех кучах снова стало поровну камней?

9. Пусть P – произвольная точка внутри треугольника ABC, $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$, $C_1 = CP \cap AB$, $C_2 = AB \cap A_1B_1$, $A_2 = B_1C_1 \cap BC$. Докажите, что прямая, содержащая ортоцентры треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_1C_2$, проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

10. Дано натуральное $n \geq 4$. Каждое ребро полного графа с $2n$ вершинами красится в синий или красный цвет так, что нет синего треугольника и нет красного полного подграфа на n вершинах. Найдите наименьшее возможное количество синих ребер.