Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №4. 26.09.2019. СТАРТ-ЛИГА
ВЫСШАЯ, ПОЛУФИНАЛ

1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что есть круговые маршруты (без повторяющихся городов) из 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 дорог. Какое наименьшее количество дорог может быть в стране?

2. 99 гномов, некоторые из них — в шляпах, стали в круг. Оказалось, что два гнома в шляпах не могут стоять ни рядом, ни так, чтобы между ними стояло ровно 48 гномов. Какое наибольшее количество гномов может быть в шляпах?

3. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа удовлетворяющие тождеству $a + b + c + 2 = abc$. Докажите, что $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geqslant 27$.

4. Дан произвольный треугольник AQB. Докажите, что найдётся сколь угодно много различных трапеций, у которых A и B — середины боковых сторон, а Q — точка пересечения диагоналей.

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка P — середина катета AC, а точка Q — середина гипотенузы AB. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на отрезок CQ. Докажите, что углы PHA и PBC равны.

6. Даны две параллельные прямые на расстоянии 5. На них отмечены точки A и B так, что прямая AB перпендикулярна этим двум прямым. Кузнечик может находиться только на этих прямых и совершать прыжки длины ровно 13. За какое наименьшее количество прыжков кузнечик может попасть из точки A в точку B?

7. При каком наименьшем натуральном $n \geq 2$ существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1$ делится на $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$?

8. На доске $m \times n$ лежат монеты, по одной в клетке, изначально все кроме одной монеты в угловой клетке лежат вверх решками, а одна — орлом. За ход разрешается убрать любую монету, лежащую вверх орлом, и перевернуть монеты во всех клетках, соседних по стороне с убранной. При каких парах (m, n) можно убрать все монеты?

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №4. 26.09.2019. СТАРТ-ЛИГА
ВЫСШАЯ, БОИ ЗА 5 – 8 МЕСТА И ПЕРВАЯ, ФИНАЛ

1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что есть круговые маршруты (без повторяющихся городов) из 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 дорог. Какое наименьшее количество дорог может быть в стране?

2. 99 гномов, некоторые из них — в шляпах, стали в круг. Оказалось, что два гнома в шляпах не могут стоять ни рядом, ни так, чтобы между ними стояло ровно 48 гномов. Какое наибольшее количество гномов может быть в шляпах?

3. Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый пятиугольник на 2019 равных треугольников?

4. Дан произвольный треугольник AQB. Докажите, что найдётся сколь угодно много различных трапеций, у которых A и B — середины боковых сторон, а Q — точка пересечения диагоналей.

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка P — середина катета AC, а точка Q — середина гипотенузы AB. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на отрезок CQ. Докажите, что углы PHA и PBC равны.

6. Даны две параллельные прямые на расстоянии 5. На них отмечены точки A и B так, что прямая AB перпендикулярна этим двум прямым. Кузнечик может находиться только на этих прямых и совершать прыжки длины ровно 13. За какое наименьшее количество прыжков кузнечик может попасть из точки A в точку B?

7. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа удовлетворяющие тождеству $a + b + c + 2 = abc$. Докажите, что $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geqslant 27$.

8. На доске $m \times n$ лежат монеты, по одной в клетке, изначально все кроме одной монеты в угловой клетке лежат вверх решками, а одна – орлом. За ход разрешается убрать любую монету, лежащую вверх орлом, и перевернуть монеты во всех клетках, соседних по стороне с убранной. При каких парах (m, n) можно убрать все монеты?

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

БОЙ №4. 26.09.2019. СТАРТ-ЛИГА ПЕРВАЯ

1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что в стране есть круговые маршруты (без повторяющихся городов) из 3, 4, 5, 6, 7 и 8 дорог. Какое наименьшее количество дорог может быть в стране?

2. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, что $(a + b + c)^2 - 1$ делится на $a^2 + b^2 + c^2$?

3. 99 гномов, некоторые из них — в шляпах, стали в круг. Оказалось, что два гнома в шляпах не могут стоять ни рядом, ни так, чтобы между ними стояло ровно 48 гномов. Какое наибольшее количество гномов может быть в шляпах?

4. Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый пятиугольник на 2019 равных треугольников?

5. Даны две параллельные прямые на расстоянии 5. На них отмечены точки A и B так, что прямая AB перпендикулярна этим двум прямым. Кузнечик может находиться только на этих прямых и совершать прыжки длины ровно 13. За какое наименьшее количество прыжков кузнечик может попасть из точки A в точку B?

6. Муравью разрешено ползать либо по рёбрам единичного кубика, либо по диагоналям его граней. Он должен переползти из одной вершины в противоположную, не посещая ни одну вершину дважды. Какое наибольшее число диагоналей может включать такой путь?

7. В прямоугольном треугольнике ABC точка P — середина катета AC, а точка Q — середина гипотенузы AB. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на отрезок CQ. Докажите, что углы PHA и PBC равны.

8. Решите в натуральных числах уравнение $xy = x + y + \text{НОК}(x, y)$.