Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Полуфинал. 26.09.2019
Высшая юниорская лига (9 класс).

1. На плоскости дан треугольник MNX. Докажите, что существует бесконечно много трапеций, середины боковых сторон которых это точки M и N, а X — точка пересечения диагоналей.

2. Даны две параллельные прямые на расстоянии 5. На них отмечены точки A и B так, что прямая AB перпендикулярна этим двум прямым. Кузнечик может находиться только на этих прямых и совершать прыжки длины ровно 13. За какое наименьшее количество прыжков кузнечик может попасть из точки A в точку B?

3. На доске $m \times n$ лежат монеты, при этом одна, расположенная в угловой клетке, лежит вверх орлом, а все остальные — решками. За один ход разрешается убрать любую монету, лежащую вверх орлом, и перевернуть монеты во всех клетках, соседних по стороне с убранной. При каких парах (m, n) можно убрать все монеты?

4. Даны простое число p и натуральные числа $m > 1$ и n такие, что число $\frac{m^{pn}-1}{m^n-1}$ — простое. Докажите, что $(p-1)^n + 1 \vdots pn$.

5. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа, удовлетворяющие тождеству $a + b + c + 2 = abc$. Докажите, что $(a+1)(b+1)(c+1) \geqslant 27$.

6. При каком наименьшем натуральном $n \geq 2$ существуют натуральные a_1, a_2, …, a_n такие, что $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 1$ делится на $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$?

7. Пусть b — касательная, проведенная в точке B к описанной окружности неравнобедренного остроугольного треугольника ABC. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Точка K — основание перпендикуляра, опущенного из H на b. Точка L — середина AC. Докажите, что треугольник BKL — равнобедренный.

8. Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый 5-угольник на 2019 равных треугольников?

Четырнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 20–28.09.2019

Тур 4. 26.09.2019
Первая юниорская лига,
высшая юниорская лига: бой за 5 место (9 класс).

1. В прямоугольном треугольнике ABC точка P — середина катета AC, а точка Q — середина гипотенузы AB. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на отрезок CQ. Докажите, что углы PHA и PBC равны.

2. Существуют ли такие целые числа $a < b < c < d$, что

$$\frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{d} = \frac{b}{a} + \frac{b}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{d}?$$

3. Даны две параллельные прямые на расстоянии 5. На них отмечены точки A и B так, что прямая AB перпендикулярна этим двум прямым. Кузнечик может находиться только на этих прямых и совершать прыжки длины ровно 13. За какое наименьшее количество прыжков кузнечик может попасть из точки A в точку B?

4. Пусть a, b, c — положительные вещественные числа, удовлетворяющие тождеству $a + b + c + 2 = abc$. Докажите, что $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geqslant 27$.

5. Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый 5-угольник на 2019 равных треугольников?

6. Пусть b — касательная, проведенная в точке B к описанной окружности неравнобедренного остроугольного треугольника ABC. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Точка K — основание перпендикуляра, опущенного из H на b. Точка L — середина AC. Докажите, что треугольник BKL — равнобедренный.

7. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что есть круговые маршруты из 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 дорог. Какое наименьшее количество дорог может быть в стране?

8. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $(a + b + c + d)^2 - 1$ делится на $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$?