XX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XVII Турнир математических игр. Математическая игра «Дуэль».
***Старшая лига (9-11 классы).* 13 сентября 2024 года.**

1. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если $AHOC$ – вписанный четырёхугольник, где H и O – ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.

2. Социолог при опросе всех 2024 жителей острова рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы лгут, на острове есть и те и другие), на вопрос о количестве рыцарей получил 2024 различных ответа «Число k делится на количество рыцарей среди нас», где k принимало все значения от 1 до 2024. При каком наибольшем k социолог мог услышать правду?

3. Натуральные числа a, b, c таковы, что число $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$ – рациональное. Какому натуральному числу, зависящему от a, b, c равно число $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$?

4. Множество точек плоскости назовём *хорошим*, если для любых двух точек множества найдётся ещё одна точка множества, равноудалённая от них. При каких $n\geq 3$ существует хорошее множество из n точек? *Приведите ответ и пример.*

5. Найдите наименьшее число a такое, что для любых чисел x, y, больших a, выполняется неравенство $x+y+xy>a$.

6. Найдите все функции f:R$\to$R, удовлетворяющие соотношению $f(x)+xf(1-x)=x^2$ для всех действительных x.

7. Незнайка пронумеровал у таблицы 7×7 все столбцы слева направо и все строки снизу вверх числами от 1 до 7, после чего предложил Знайке расставить во всех клетках таблицы по одному числа от 1 до 49 так, чтобы каждое поставленное число делилось либо на номер своего столбца, либо на номер своей строки, и при этом числа в каждой строке должны идти в возрастающем порядке слева направо. Есть ли у Знайки возможность выполнить условие Незнайки?

8. Вася решил из клетчатых квадратов 8×8 вырезать все 15-клетчатые многоугольники, содержащие обе противоположные клетки квадрата. Сколько различных фигур у него могло получиться? Фигуры считаются одинаковыми, если их можно совместить при наложении.

9. Сколько существует не оканчивающихся нулём 99-значных чисел таких, что после прибавления к числу его десятичной записи, записанной задом наперёд, получается число из одинаковых нечётных цифр?

10. В группе школьников у каждых десятерых найдётся ровно один общий знакомый. Сколько школьников может быть в этой группе?

11. Обозначим через $f(n)$ общее число нулей в десятичной записи всех чисел от 1 до n. Например, $f(9) = 0$, $f(10) = 1$, $f(100) = 11$. Найдите $f(10^{10})$.

12. M и K – середины катетов $AC=b$ и $BC=a$ соответственно прямоугольного треугольника ABC. Окружности, описанные около треугольников ACK и BCM повторно пересекаются в точке P. CP пересекает AB в точке D. Какое наибольшее значение может принимать отношение $CD:DP$?

13. Найдите все бесконечные последовательности целых чисел $\{a_k\}$ таких, что для любого натурального $n \geq 2$ и некоторого целого d выполняется равенство $a_n a_{n+2} - a_{n-1} a_{n+1} = d$.

14. Незнайка отметил на окружности четыре вершины (A, B, C, D) правильного $2n$-угольника ($n \geq 2$ – натуральное число), разрешив Знайке найти градусные величины двух дуг AB и CD. Они оказались равны 30° и 76°. Какое наибольшее количество вершин этого многоугольника сможет гарантированно восстановить Знайка циркулем и линейкой?

15. Какое наименьшее количество цифр можно приписать справа к числу 2024, чтобы полученное число делилось на все однозначные натуральные числа? Приведите ответ и пример.

16. Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых число $\dfrac{xy^2}{x+y}$ – простое.