XX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
XVII Турнир математических игр. Математическая игра «Пенальти».
Младшая лига (7-8 классы). 1 вариант. ***14 сентября 2023 года.***

1. Каким наименьшим количеством цветов можно покрасить все натуральные числа от 1 до 2024 так, чтобы любые два нечётных одноцветных числа были взаимно просты?

2. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. *Туристическим маршрутом* называется последовательность дорог, по которым можно проехать, не посещая никакой город дважды, а в конце – приехать в начальный город. Известно, что в стране есть туристические маршруты, состоящие из 3, 4, 5, 6, 7 и 8 дорог. Какое наименьшее число дорог может быть в этой стране?

3. Вася взял первые $2N$ простых чисел (N – натуральное число) и выделил из них две непересекающиеся группы с равным количеством чисел так, что суммы квадратов чисел в этих группах равны, использовав возможно не все числа. При каком наименьшем N такое могло быть? Приведите ответ и пример.

4. Назовём число *арифметическим*, если его цифры слева направо образуют арифметическую прогрессию длины не меньше трёх, например, 6420 или 147. Сколько всего существует арифметических чисел?

9. Девятиклассник Вася придумал записывать даты восьмизначным числом – год (4 цифры), месяц (2 цифры), день (2 цифры), причём месяц и день могут начинаться с 0, например, 14 сентября 2024 года он запишет как 20240914. Сколько восьмизначных чисел-дат в 2024 году будут кратны 9?

10. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух среднее арифметическое чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 1, 2, 3, …, 10. Какое число произнёс школьник, задумавший число 1?

11. Вася написал N различных попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 2025. При каком наименьшем N среди Васиных чисел гарантированно есть простое число?

12. На сторонах AC и BC треугольника ABC, где $\angle ACB = 27°$, отмечены точки D и E соответственно такие, что $BE = ED$. Внутри треугольника отмечена точка F так, что $AB = FC$, $AF = DC$, $\angle BEF = \angle FED$ и $\angle BFA = 58°$, $\angle CFD = 101°$. Найдите угол BCF.

5. На сторонах AC и BC треугольника ABC, где $\angle ACB = 25°$, отмечены точки D и E соответственно такие, что $BE = ED$. Внутри треугольника отмечена точка F так, что $AB = FC$, $AF = DC$, $\angle BEF = \angle FED$ и $\angle BFA = 56°$. $\angle CFD = 102°$. Найдите угол BCF.

6. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух среднее арифметическое чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 1, 2, 3, …, 10. Какое число задумал школьник, произнёсший число 6?

7. Какое наибольшее значение может принимать 7-значное число $\overline{ОРЛЁНОК}$, если есть тройка последовательно делящихся друг на друга чисел $\overline{ОРЛ} \vdots \overline{ЁН} \vdots \overline{ОК}$? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)

8. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая ладья била ровно две ладьи, при этом новых ладей с таким свойством добавить нельзя? Приведите ответ и пример.

<u>Младшая лига (7-8 классы). 2 вариант.</u>

13. Двое игроков по очереди называют натуральные числа, причём следующее число должно быть строго меньше предыдущего, но не меньше половины предыдущего. Проигрывает тот, кто будет вынужден назвать число 1. Первым ходом первый игрок назвал 2024. Кто выиграет при правильной игре и какое число он должен при этом назвать в самом начале игры после числа 2024?

14. Сумма 17 действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$ равна 2024. Оказалось, что для любого натурального k от 1 до 17 среди них найдутся какие-то k чисел с целой суммой. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$?

15. Решите ребус, указав также для каждого решения количество слагаемых в левой части ребуса $\overline{ИГРА} + \overline{ИГРА} + \ldots + \overline{ИГРА} = \overline{ИГРА2024}$. *(Разные буквы – разные цифры, $\overline{ИГРА}$ - четырёхзначное число, $\overline{ИГРА2024}$ – восьмизначное число.)*

16. Сколькими способами на доске 8×7 можно разместить наибольшее количество не бьющих друг друга королей?