Старшая лига (9-11 классы). **Вариант 1.**

1. Целые числа a, b, c – длины сторон некоторого треугольника. При каком наименьшем периметре треугольника трехчлен ax^2+bx+c имеет хотя бы один действительный корень? Приведите ответ и пример.

2. Найдите все натуральные числа n, для которых существует ровно 2024 натуральных числа m таких, что выполнены неравенства: $2 \le n/m \le 5$.

3. Вася взял первые $2N$ простых чисел (N – натуральное число) и выделил из них две непересекающиеся группы с равным количеством чисел так, что суммы квадратов чисел в этих группах равны, использовав возможно не все числа. При каком наименьшем N такое могло быть? Приведите ответ и пример.

4. Найдите $2a+2b–1$, если $a–b=p$, $ab=n^2$, где a, b, n – натуральные числа, p – простое. Приведите также подтверждающий пример.

Старшая лига (9-11 классы). **Вариант 2.**

9. Девятиклассник Вася придумал записывать даты восьмизначным числом – год (4 цифры), месяц (2 цифры), день (2 цифры), причём месяц и день могут начинаться с 0, например, 14 сентября 2024 года он запишет как 20240914. Сколько восьмизначных чисел-дат в 2024 году будут кратны 9?

10. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух среднее арифметическое чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 1, 2, 3, …, 10. Какое число произнёс школьник, задумавший число 1?

11. Для какого наименьшего N из любых N различных точек с целыми координатами на плоскости можно выбрать 4 точки, центр тяжести которых тоже есть целая точка?

12. Бесконечная последовательность натуральных чисел a_0, a_1, a_2, … такова, что $a_0=1$ и $a_n = kn + (-1)^n \cdot a_{n-1}$ для любого $n \ge 1$. При каких натуральных k в этой последовательности обязательно встретится число 2024?

5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с равными сторонами длиной a середины P, Q сторон AB, CD и середины S, T сторон BC, DE соединены отрезками PQ и ST. Пусть M и N – середины отрезков PQ и ST. Какие значения может принимать a, если MN=1?

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, отличном от дельтоида, $AB=BC$, $\angle B=44°$, $\angle D=56°$ и биссектрисы углов A, B и D пересекаются в точке P. Найдите $\angle A$.

7. Какое наибольшее значение может принимать 7-значное число $\overline{ОРЛЁНОК}$, если есть тройка последовательно делящихся друг на друга чисел $\overline{ОРЛ} \vdots \overline{ЁН} \vdots \overline{ОК}$? (*одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры*)

8. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая ладья била ровно две ладьи, при этом новых ладей с таким свойством добавить нельзя? Приведите ответ и пример.

13. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, отличном от дельтоида, $AB=BC$, $\angle B=\beta$, $\angle D=\alpha$ и биссектрисы углов A, B и D пересекаются в точке P. Найдите $\angle A$.

14. a, b, c – целочисленные длины сторон некоторого треугольника. При каком минимальном периметре треугольника квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет 2 различных действительных корня? Приведите ответ и пример.

15. Найдите на координатной плоскости геометрическое место точек T таких, что треугольник APT – прямоугольный равнобедренный ($PA=PT$), где точка A имеет координаты (a; 0), а точка P лежит на прямой $y=x$.

16. Незнайка назвал натуральные числа *убывающими*, если в них цифры слева направо идут в убывающем порядке, например, 854210. Знайка сказал, что такие числа не делятся на 11. Тогда Незнайка разрешил себе ровно в одном месте (можно и по краям) ставить цифру, отличную от остальных и нарушающую порядок убывания, например, 8547210 или 3854210. Какое наибольшее делящееся на 11 число можно такой операцией получить из убывающего числа?