Пятнадцатый Южный математический турнир

Онлайн, 15-21.10.2020

Командная олимпиада. 15 октября 2020 г.

Юниор–лига

Второй тур

1. Решите в натуральных числах уравнение $x^{100} - y^{100} = 100!$.

2. На бесконечной клетчатой плоскости нарисован треугольник с вершинами в узлах, площадь которого меньше 2020. Известно, что на каждой стороне этого треугольника лежит ровно m узлов, не считая концов. При каком наибольшем m это возможно?

3. На основании AC равностороннего треугольника ABC выбрана точка D, а на боковой стороне BC – точка E так, что $CD = DE$. Точки H, J и K – середины DE, AE и BD соответственно. Описанная окружность треугольника DHK пересекает AD в точке $F \neq D$, а писанная окружность треугольника HEJ пересекает BE в точке $G \neq E$. Прямая, проходящая через точку K параллельно AC, пересекает AB в точке I. Прямые IH и GF пересекаются в точке M. Докажите, что точки J, M и K лежат на одной прямой.

4. В однокруговом турнире по волейболу участвовали 100 команд. Оказалось, что команда, занявшая k-е место, не делит его ни с кем (то есть нет другой команды с таким же количеством побед), при этом обыграла все команды, занявшие более высокое место и проиграла всем командам, занявшим более низкое. При каком наименьшем k такое возможно?

5. Даны натуральные числа n и $k \leqslant n-2$. Известно, что модуль суммы любых k из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не превосходит 1. Кроме того, $|a_1| \geqslant 1$. Докажите, что $|a_1|+|a_i| \leqslant 2$ при $2 \leqslant i \leqslant n$.

Время на решение задач II части: 12.30 – 14.30.

В 14.30 работы должны быть сданы руководителю команды.

Работы следует отсканировать или сфотографировать в хорошем качестве и отправить на адрес orlyonok@adygmath.ru не позже 14.45. Работы, присланные после 14.45, проверены не будут. Пожалуйста, убедитесь, что файлы с вашими решениями читаются.