XV Южный математический турнир.
Командная олимпиада. 15.10.2020.
Гранд-лига (10-11 кл). I часть.

ЗАДАЧИ. ОТВЕТЫ.

1. (3 балла) В группе n детей. В каждой паре детей хотя бы один послал другому SMS. Оказалось, что для каждого ребёнка среди тех, кому он послал SMS, ему послали SMS ровно 25%. Возможно ли это при а) $n = 36$? б) $n = 37$? в) $n = 38$?

   Ответ: а) да; б) нет; в) нет.

2. (3 балла) Среди вершин правильного 17-угольника выбирают тройку вершин. Сколько способов выбрать её так, чтобы треугольник с этими тремя вершинами был остроугольным?

   Ответ: 204.

3. (3 балла) Дан треугольник ABC со сторонами 15, 20, 25. Найдите расстояние между его центром вписанной окружности и центром вписанной окружности треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

   Ответ: $2,5$.

4. (3 балла) Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 10$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot (a_n - 1)$ при всех натуральных n. Найдите a_{100}.

   Ответ: 40501.

5. (3 балла) Найдите наибольшее натуральное число, не превосходящее $1\underbrace{0000\ldots0}_{99 \text{ нулей}}5$, не представимое в виде суммы трех квадратов целых чисел.

   Ответ: $\underbrace{9999\ldots9}_{100 \text{ девяток}}$ (или $10^{100} - 1$).

6. (3 балла) Дано уравнение $x^{10} + 7x + 1 = 0$. Найдите сумму девятых степеней всех его комплексных корней.

   Ответ: -63.

7. (7 баллов) Дан треугольник ABC. Пусть точка C' на стороне AB такова, что отрезок CC' делит треугольник на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей. Обозначим через t_c длину отрезка CC'. Аналогично определим t_a и t_b. Выразите площадь треугольника ABC через t_a, t_b, t_c.

   Ответ: $S = \dfrac{t_a t_b t_c}{\sqrt{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}}$.

   РЕШЕНИЕ.

   1) Пусть r_c — радиус вписанной окружности треугольника ACC' (или BCC'). Имеем
   $S_{ABC} = S_{ACC'} + S_{BCC'}$,
   $pr = (b + AC' + t_c)r_c/2 + (a + BC' + t_c)r_c/2$,
   $pr = t_c r_c + (b + AC' + BC' + a)r_c/2$,
   $pr = t_c r_c + pr_c$,

$$t_c = p \cdot \frac{r - r_c}{r_c}. \tag{1}$$

2) Пусть I, I_1, I_2 — центры вписаных окруностей треугольников ABC, ACC', BCC' соответственно. Тогда I_1 и I_2 лежат на биссектрисах AI, BI и $I_1I_2 \parallel AB$. Тогда $II_1/I_1A = II_2/I_2B = \dfrac{r-r_c}{r_c}$.

Из теорем синусов для треугольников ACI_1, I_1CI, BCI_2, I_2CI выводим $\dfrac{r-r_c}{r_c} = \dfrac{CI}{\sqrt{ab}}$.

$CI = \dfrac{a+b}{a+b+c}\ell_c$, где ℓ_c — биссектриса, $\ell_c = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$, отсюда $CI = \dfrac{ab\cos\frac{\gamma}{2}}{p}$, $\dfrac{r-r_c}{r_c} = \dfrac{\sqrt{ab}\cos\frac{\gamma}{2}}{p}$. Подставляя в (1), получаем $t_c = \sqrt{ab}\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{ab\sin\gamma}{2}}\dfrac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\dfrac{\sin\gamma}{2}}}$. Окончательно,

$$t_c = \sqrt{S}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}. \qquad (2)$$

3) Пользуясь известным тождеством $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, получаем требуемое.

8. (7 баллов) При каком наименьшем натуральном n существует многочлен f степени n такой, что последовательность из 200 чисел $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(200)$ является непостоянной геометрической прогрессией?

Ответ: 199.

РЕШЕНИЕ.

Докажем, что $n \leq 199$. Рассмотрим *интерполяционный многочлен Лагранжа*, принимающий в точках 1, 2, …, 200, значения $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{200}$. Его степень ≤ 199.

Докажем, что $n \geq 199$. Пусть q — знаменатель прогрессии $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(200)$, где f — многочлен степени n. Тогда уравнение $f(x+1) - qf(x) = 0$ степени n (так как $q \neq 1$, то коэффициент при n-й степени не обнуляется) имеет хотя бы 199 корней: $1, 2, \ldots, 199$. Отсюда $n \geq 199$.