XV Южный математический турнир. Командная олимпиада. 15.10.2020. Гранд-лига (10-11 кл). II часть.

РЕШЕНИЯ.

9. (7 баллов) Сколько способов расположить числа $1, 2, \ldots, 2020$ в ряд так, чтобы для любых трёх подряд идущих чисел x, y, z (слева направо) было выполнено условие $x^2+2yz < z^2+2xy$?

РЕШЕНИЕ.

Преобразуем неравенство:

$$x^2 + 2xz < z^2 + 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy < z^2 - 2yz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 < z^2 - 2yz + y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 < (z-y)^2.$$

Последнее неравенство эквивалентно тому, что $|x - y| < |z - y|$. Соответственно, условие задачи можно переформулировать следующим образом: найти количество способов расставить числа от 1 до 2020 в ряд так, чтобы для любых трёх подряд идущих x, y, z выполнялось условие $|x - y| < |z - y|$. То есть, модули разности пар соседних чисел должны строго возрастать. Самый большой возможный модуль разности это $|2020 - 1| = 2019$. Пар соседних чисел тоже 2019. Значит встречаются все возможные модули разности от 1 до 2019 (и идут ровно в таком порядке слева направо).

Посмотрим на самую последнюю пару чисел. Её модуль разности равен 2019. Для неё только два варианта: это либо «1, 2020», либо «2020, 1». Причём для каждого из двух вариантов расположение оставшихся чисел восстанавливается однозначно (идём справа налево).

Ответ: 2 варианта.

10. (7 баллов) Решите в натуральных числах уравнение $x^{100} - y^{100} = 100!$.

РЕШЕНИЕ 1.

По малой теореме Ферма x^{100} сравнимо с 0 или 1 по модулю 101. Аналогично, y^{100} сравнимо с 0 или 1 по модулю 101. По теореме Вильсона, 100! сравнимо с -1 по модулю 101. Это возможно только в случае, когда x^{100} делится на 101. Тогда $x > 100$. Тогда

$$x^{100} - y^{100} \geq x^{100} - (x-1)^{100} > x^{100} - x^{99}(x-1) = x^{99} > 100^{99} > 100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 2.$$

Противоречие.

РЕШЕНИЕ 2.

Лемма. x и y взаимно просты.

Доказательство. Предположим противное. x и y делятся на p. Тогда 100! делится на p^{100}. По формуле Лежандра, $ord_p(100!) = [100/p] + [100/p^2] + \ldots < 100(1/2 + 1/4 + \ldots) = 100$ — противоречие. Лемма доказана.

Следствие. x и 100! взаимно просты. В противном случае, их общий простой делитель был бы делителем y. Значит, $x > 100$.

Далее получаем противоречие так же как в решении 1.

11. (7 баллов) Точки A, C, K, L лежат на одной прямой. Рассматриваются окружности, касающиеся этой прямой в фиксированной точке (отличной от A, C, K, L). Касательные из A и C к окружности пересекаются в точке B. Касательные из K и L к окружности пересекаются в точке P. Докажите, что всевозможные прямые BP пересекает прямую AC в фиксированной точке (либо параллельны AC).

РЕШЕНИЕ.

Пусть окружность из условия касается AB в точке X ,BC в Y, AC в N, PK в Z, PL в T. По теореме Менелая для треугольника ABC получаем, что прямая XY проходит через фиксированную точку на стороне AC (из-за $AX = AN = const$, $CY = CN = const$, $BX = BY$). Аналогично прямые TZ, YZ, XT, YT, XZ проходят через фиксированные точки на прямой AC (теорему Менелая применяем для всевозможных треугольников образованных парой касательных и прямой AC). Пусть XZ и YT пересекаются в F, а XT и YZ в G. Заметим, что GF совпадает с BP в силу того, что полюсы обеих прямых совпадают. Далее имеем четырехугольник $XYZT$, где все стороны и диагонали пересекают пересекают прямую AC в фиксированных точках. Обозначим точки пересечения AC с XZ, YZ, XT, TY, TZ, XY за $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Пусть прямая GF пересекает AC в R. Тогда применяя теорему Менелая для треугольника A_1ZA_2 и прямой GF, затем для A_2ZA_5 и прямой A_3G, затем для A_1ZA_5 A_4F, получаем требуемое.

12. (7 баллов) На доске изначально написаны 100 чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$. За одну операцию можно стереть с доски два числа a, b и вместо них написать число $a + b + \dfrac{ab}{s}$, где s — сумма всех чисел, написанных на доске в момент после стирания чисел a и b. После 98 операций на доске остаются два числа $x \geq y$. Найдите наибольшее возможное значение x.

РЕШЕНИЕ.

Ответ. $12\,582\,075 = 101 \cdot 25 \cdot 4983$

Заметим, что после замены чисел a и b на $c = a + b + \dfrac{ab}{s}$ сумма попарных произведений всех чисел не изменится: от удаления a и b она уменьшится на $ab + (a + b)s$, а от добавления c — увеличится на $cs = (a + b)s + ab$. Поэтому сумма всех попарных произведений всегда будет равна исходной, то есть

$$\frac{(1 + 2 + \cdots + 100)^2 - (1^2 + 2^2 + +100^2)}{2} = \frac{1}{2}\left(101^2 \cdot 50^2 - \frac{50 \cdot 101 \cdot 201}{3}\right) =$$

$$= 101 \cdot 25 \cdot (101 \cdot 50 - 67) = 101 \cdot 25 \cdot 4983 = 12\,582\,075.$$

С другой стороны, каждое появляющееся на доске число не меньше стёртых на этом шаге; по индукции получаем, что все числа на доске в любой момент не меньше 1. Значит, $y \geq 1$, откуда $x \leq 12\,582\,075$.

Чтобы получить такое число x, достаточно применять операции, не затрагивая число 1, исходно присутствующее на доске.

Комментарий: за "жадный алгоритм"(берем на каждом шаге два максимальных числа) — баллы не начисляются.