XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Старшие лиги. Командная олимпиада. 13.09.2022.

1. Натуральные числа a, b, и c являются натуральными степенями натурального числа k. Известно, что уравнение $ax^2 - bx + c = 0$ имеет ровно один вещественный корень r, причем $r < 100$. Найдите наибольшее возможное значение r.

2. Для натуральных $n > 100$, делящихся на 4, обозначим через A_n сумму всех нечетных (положительных) делителей числа n, а через B_n — сумму всех четных (положительных) делителей числа n. Найдите наименьшее возможное значение числа $B_n - 2A_n - n$ (по всем делящимся на 4 числам $n > 100$).

3. Окружность γ с центром в точке Q проходит через вершины B и C остроугольного треугольника ABC. Отрезок AQ пересекает γ в точке P. Прямые BP и CP вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Окружность с диаметром NP пересекает сторону AB в точках X и Y, а окружность с диаметром MP пересекает сторону AC в точках Z и T. Докажите, что точки X, Y, Z и T лежат на одной окружности.

4. Дано натуральное число n. В турнире по волейболу принимает участие $3n$ команд (любые две команды играют друг с другом не более одного матча, ничьих не бывает). В турнире было сыграно $3n^2$ игр. Докажите, что найдется команда, которая выиграла не менее $n/4$ игр и проиграла не менее $n/4$ игр.

5. Имеются 100 гирек разной массы $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$. Известно, что $1 \leqslant a_1 \leqslant 2$ и $1 \leqslant a_i - a_{i-1} \leqslant 2$ для всех $i = 2, 3, \ldots, 100$. Найдите наибольшее k такое, что суммарный вес k самых легких гирек **наверняка** не превосходит суммарного веса оставшихся.

6. Из проволоки спаяли сетку в виде квадрата $n \times n$, разбитого на единичные квадраты. Эту сетку надо разбить на *уголки*, состоящие из двух перпендикулярных единичных отрезков, имеющих общий конец (этот общий конец назовём *центром* уголка). При этом ни у каких двух уголков не должно быть общего центра. Найдите количество способов выполнить такое разбиение.

7. Дан фиксированный треугольник ABC. Переменные точки D, E и F выбираются на прямых BC, CA и AB соответственно так, что треугольники DFE и ABC ориентированы по-разному и подобны (с соответствием вершин). Описанные окружности треугольников BDF и CDE вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q, соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника DPQ проходит через фиксированную точку.

8. Дано простое число $p \geq 100$. Докажите, что существует перестановка $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ чисел $(1, 2, \ldots, p-1)$ такая, что $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{p-2}x_{p-1} \equiv 2 \pmod p$, а $2(x_1x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{p-3}x_{p-1}) \equiv 3 \pmod p$.