XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Старт». Командная олимпиада. 13.09.2022.

1. Найдите все простые числа, квадрат которых можно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел.

2. В каждой клетке таблицы 10×10 стоит одно из чисел 1 и -1. Известно, что сумма всех чисел в каждой строке и каждом столбце делится на 3. Какова наибольшая возможная сумма всех чисел в таблице?

3. Точка E — середина стороны BC квадрата $ABCD$. Построен квадрат $AEFG$ так, что точка D лежит внутри него. Чему равен угол CDF?

4. Ладья ходит по бесконечной шахматной доске, причем в первый ход она ходит на одну клетку по горизонтали, во второй ход — на 2 клетки по вертикали, в третий ход — на 3 клетки по горизонтали, в четвертый ход — на 4 клетки по вертикали, и т.д. (горизонтальные и вертикальные ходы чередуются). При каких n после n ходов ладья сможет вернуться в начальную клетку?

5. Для натуральных $n > 100$, делящихся на 4, обозначим через A_n сумму всех нечетных (положительных) делителей числа n, а через B_n — сумму всех четных (положительных) делителей числа n. Найдите наименьшее возможное значение числа $B_n - 2A_n - n$ (по всем делящимся на 4 числам $n > 100$).

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BE и CF, а M — середина BC. Перпендикуляр к EF, проведенный через M, пересекает отрезок AB в точке K. Докажите, что $\angle CME = \angle BKE$.

7. Имеются 100 гирек с массами $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$. Известно, что $1 \leqslant a_1 \leqslant 2$ и $1 \leqslant a_i - a_{i-1} \leqslant 2$ для всех $i = 2, 3, \ldots, 100$. Найдите наибольшее k такое, что наверняка самые легкие k гирек весят в сумме не больше, чем все остальные.

8. Дано натуральное число n. В турнире по волейболу принимает участие $3n$ команд (любые две команды играют друг с другом не более одного матча, ничьих не бывает). В турнире было сыграно $3n^2$ игр. Докажите, что найдется команда, которая выиграла не менее $\frac{n}{4}$ игр и проиграла не менее $\frac{n}{4}$ игр.