Семнадцатый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-20.09.2022

Командная олимпиада. 13 сентября 2022 г.

Юниор-лига

1. В каждой клетке таблицы 10×10 стоит одно из чисел 1 и -1. Известно, что сумма всех чисел в каждой строке и каждом столбце делится на 3. Какова наибольшая возможная сумма всех чисел в таблице?

2. Числа a, b и c – натуральные степени одного и того же натурального числа. Известно, что у уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ есть ровно один вещественный корень и этот корень не превосходит 100. Найдите наибольшее возможное значение этого корня.

3. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ существует натуральное число, которое можно представить в виде суммы k квадратов различных натуральных чисел при всех k от 1 до n.

4. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые BI и CI вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Окружность с диаметром NI пересекает сторону AB в точках P и Q, а окружность с диаметром MI пересекает сторону AC в точках R и S. Докажите, что точки P, Q, R и S лежат на одной окружности.

5. Дано простое $p > 5$. Можно ли так расставить в вершинах правильного $(p-1)$-угольника все числа $1, 2, \ldots, p-1$ (по одному в каждой вершине) так, чтобы произведение любых трёх чисел, стоящих в трёх последовательных вершинах, давало при делении на p такой же остаток, как и произведение чисел в трёх противоположных им вершинах?

6. Дано натуральное число n. В турнире по волейболу принимает участие $3n$ команд (любые две команды играют друг с другом не более одного матча, ничьих не бывает). В турнире было сыграно $3n^2$ игр. Докажите, что найдется команда, которая выиграла не менее $\frac{n}{4}$ игр и проиграла не менее $\frac{n}{4}$ игр.

7. Имеются 100 гирек, массы которых $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$. Известно, что $1 \leqslant a_1 \leqslant 2$ и $1 \leqslant a_i - a_{i-1} \leqslant 2$ для всех $i = 2, 3, \ldots, 100$. При каком наибольшем k можно заведомо утверждать, что самые легкие k гирек в сумме весят не больше, чем все остальные?

8. Дан треугольник ABC. Переменные точки D, E, F выбираются на сторонах BC, CA, AB соответственно так, что треугольник DFE подобен треугольнику ABC (именно в таком порядке). Описанные окружности треугольников BDF и CDE вторично пересекают описанную окружность ABC в точках P и Q соответственно. Докажите, что описанная окружность DPQ проходит через фиксированную точку.