XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Гранд». Первый тур. 14.09.2022.

1. В стране $3k+1$ город, любые два из которых соединены дорогой. Все дороги делятся на 3 вида, причём из каждого города выходит по k дорог каждого вида. Назовём четвёрку городов *хорошей*, если в этой четвёрке есть ровно один город, все три дороги из которого в остальные города четвёрки имеют разные типы. Докажите, что количество хороших четвёрок чётно.

2. Можно ли на плоскости расположить 2022 точки так, чтобы нашлось более полумиллиона прямых, каждая из которых содержит хотя бы три отмеченных точки?

3. Найдите все натуральные n, для которых число

$$\left[\frac{n}{2^0}\right]\cdot\left[\frac{n}{2^1}\right]\cdot\ldots\cdot\left[\frac{n}{2^k}\right]+2\cdot 4^{[k/2]}$$

является точным квадратом, где k — неотрицательное целое число, удовлетворяющее неравенству $2^k \le n < 2^{k+1}$.

4. Дана окружность ω с центром O. Прямая PK касается окружности ω в точке K. Пусть Q — проекция точки K на OP. Через точку Q проведена прямая, пересекающая PK в точке R, а серединный перпендикуляр к PQ — в точке M. Докажите, что описанная окружность треугольника PMR касается ω.

5. Даны вещественные числа x, y, z, не меньшие 1. Докажите, что

$$\frac{x^3-y+z}{z^3-z+3xy}+\frac{y^3-z+x}{x^3-x+3yz}+\frac{z^3-x+y}{y^3-y+3zx}\geqslant 1.$$

6. Аня и Боря играют в игру на решетке 2022×2022. Сначала Аня красит стороны некоторых клеток решетки в красный цвет так, чтобы ни у какой клетки не нашлось двух соседних красных сторон. Затем Боря должен закрасить несколько сторон клеток синим цветом так, чтобы они образовали путь между какими-то двумя углами решетки. Если у Бори получился путь, он победил. Иначе побеждает Аня. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

7. Десятичная запись числа k состоит из блоков подряд идущих одинаковых цифр; обозначим через $B(k)$ количество блоков, состоящих из единиц. Для каждого натурального n найдите сумму $B(1)+B(2)+B(3)+\ldots+B(10^n-1)$.

8. Найдите все натуральные числа n, для которых существует перестановка a_1, a_2, …, a_n чисел $\{1,2,\ldots,n\}$, удовлетворяющая равенству

$$a_1-2a_2+4a_3-8a_4+\cdots+(-2)^{n-1}a_n=0.$$

9. В треугольнике ABC точки M и N изогонально сопряжены. На прямых BM, CM, BN и CN выбраны точки P, Q, R и S соответственно так, что $PR \parallel QS \parallel MN$. Докажите, что точки A, P, Q, M лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда точки A, R, S, N лежат на одной окружности.

10. Найдите все пары многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами и единичными старшими коэффициентами, удовлетворяющие соотношению $P(1)+P(2)+\ldots+P(n)=Q(1+2+3+\ldots+n)$ при всех натуральных n.