XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Премьер». Первый тур. 14.09.2022.

1. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке G, а точки E и F на стороне BC таковы, что $BE = EF = FC$. Точки X и Y выбраны на сторонах AB и AC соответственно. Прямая, проходящая через E параллельно XG, и прямая, проходящая через F параллельно YG, пересекаются в точке P внутри треугольника ABC. Докажите, что прямая GP делит отрезок XY пополам.

2. Найдите все натуральные числа n, для которых существует перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, удовлетворяющая равенству
$$a_1 - 2a_2 + 4a_3 - 8a_4 + \cdots + (-2)^{n-1}a_n = 0.$$

3. Маша и Медведь раскладывают $n \geq 2$ различных фруктов на обеденном столе. Маша предлагает разложить все фрукты по тарелкам, используя чётное количество тарелок, а тарелки расставить по кругу (никакая тарелка не может быть пустой). Медведь же предлагает вместо тарелок использовать миски, при этом хочет использовать нечётное количество мисок. Докажите, что количество способов накрыть обеденный стол у Маши и Медведя одинаково?

4. Найдите все натуральные n, для которых число
$$\left[\frac{n}{2^0}\right] \cdot \left[\frac{n}{2^1}\right] \ldots \left[\frac{n}{2^k}\right] + 2$$
является квадратом натурального числа, где k — целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $2^k \leq n < 2^{k+1}$.

5. . Произведение положительных чисел a, b и c равно $1/8$. Докажите, что
$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq \frac{15}{16}.$$

6. Аня и Боря играют в игру на решетке 2022×2022. Сначала Аня красит стороны некоторых клеток решетки в красный цвет так, чтобы ни у какой клетки не нашлось двух соседних красных сторон. Затем Боря должен закрасить несколько сторон клеток синим цветом так, чтобы получился путь между двумя какими-то углами решетки. Если у Бори получился путь, он победил. Иначе, побеждает Аня. Кто из игроков выигрывает?

7. Дана окружность ω с центром O. Прямая PK касается окружности ω в точке K. Пусть Q — проекция точки K на OP. Через точку Q проведена прямая, пересекающая PK в точке R, а серединный перпендикуляр к PQ — в точке M. Докажите, что описанная окружность треугольника PMR касается ω.

8. Двоичная запись числа k состоит из блоков подряд идущих единиц и подряд идущих нулей. Обозначим $B(k)$ количество блоков, состоящих из единиц. Например, $B(17) = 2$, $B(127) = 1$. Чему равна сумма
$$B(1) + B(2) + B(3) + \ldots + B(2^n - 1)?$$