XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Высшая старт-лига. 1 тур. 14.09.2022.

1. В каждой клетке таблицы 3×3 стоит вещественное число. Известно, что произведение чисел в каждой строке равно 1, произведение чисел в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в каждом квадрате 2×2 равно 2. Чему может равняться число в центральной клетке?

2. Найдите наименьшее n, для которого верно утверждение: среди любых n последовательных натуральных чисел найдется число, сумма цифр которого делится на 17.

3. Можно ли расположить 9 точек на плоскости так, чтобы никакие 4 точки не лежали на одной прямой, и было хотя бы 10 троек точек, лежащих на одной прямой?

4. Докажите, что для любых положительных a, b, c выполняется неравенство
$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geqslant \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

5. Двоичная запись числа k состоит из блоков подряд идущих единиц и подряд идущих нулей. Обозначим $B(k)$ количество блоков, состоящих из единиц. Например, $B(17) = 2$, $B(127) = 1$. Чему равна сумма
$$B(1) + B(2) + B(3) + \ldots + B(2^n - 1)?$$

6. Аня и Боря играют в игру на клетчатом прямоугольнике 2022×2022. Сначала Аня красит стороны некоторых клеток в красный цвет так, чтобы ни у какой клетки не нашлось двух соседних красных сторон. Затем Боря должен закрасить несколько сторон клеток синим цветом так, чтобы получился путь между двумя какими-то углами прямоугольника. Если у Бори получится путь, он победит, иначе побеждает Аня. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

7. Натуральное число n называется *бенгальским*, если оно имеет хотя бы четыре натуральных делителя, причём сумма его четырех наибольших натуральных делителей равна $2n$. Найдите количество бенгальских натуральных чисел, не превосходящих 3000.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть M — середина AA_1. Точки N и K на отрезке BC такие, что углы MC_1N и MB_1K — прямые. Докажите, что $BN = KC$.

XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Первая старт-лига. 1 тур. 14.09.2022.

1. В каждой клетке таблицы 3×3 стоит вещественное число. Известно, что произведение чисел в каждой строке равно 1, произведение чисел в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в каждом квадрате 2×2 равно 2. Чему может равняться число в центральной клетке?

2. Докажите, что среди любых 400 последовательных натуральных чисел найдется число, сумма цифр которого делится на 17.

3. Можно ли расположить 9 точек на плоскости так, чтобы никакие 4 точки не лежали на одной прямой, и было хотя бы 10 троек точек, лежащих на одной прямой?

4. Докажите, что для любых положительных a, b выполняется неравенство
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{4}{ab} + 2 \geqslant \frac{4}{a} + \frac{4}{b}.$$

5. Петя и Вася 25 раз сыграли в камень-ножницы-бумагу. Петя 12 раз показал камень, 6 раз ножницы, 7 раз бумагу. Вася 13 раз показал камень, 9 раз ножницы, 3 раза бумагу. Ничьих не было. Кто выиграл больше раз?

6. Аня и Боря играют в игру на клетчатом прямоугольнике 2022×2022. Сначала Аня красит стороны некоторых клеток в красный цвет так, чтобы ни у какой клетки не нашлось двух соседних красных сторон. Затем Боря должен закрасить несколько сторон клеток синим цветом так, чтобы получился путь между двумя какими-то углами прямоугольника. Если у Бори получится путь, он победит, иначе побеждает Аня. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

7. Натуральное число n называется *бенгальским*, если оно имеет хотя бы четыре натуральных делителя, причём сумма его четырех наибольших натуральных делителей равна $2n$. Найдите количество бенгальских натуральных чисел, не превосходящих 3000.

8. В остроугольном треугольнике ABC с углом BAC, равным $45°$, проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть M — середина AA_1. Точки N и K на отрезке BC такие, что углы MC_1N и MB_1K — прямые. Докажите, что $BN = KC$.