Семнадцатый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 12-20.09.2022

Юниор-лига. 1 тур. 14.09.22

1. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке G, а точки E и F на стороне BC таковы, что $BE = EF = FC$. Точки X и Y выбраны на сторонах AB и AC соответственно. Прямая, проходящая через E параллельно XG, и прямая, проходящая через F параллельно YG, пересекаются в точке P внутри треугольника ABC. Докажите, что прямая GP делит отрезок XY пополам.

2. Можно ли отметить на плоскости 50 точек таким образом, чтобы никакие четыре из этих точек не лежали на одной прямой и при этом нашлось более 400 троек точек, лежащих на одной прямой?

3. Найдите все натуральные числа n, для которых существует перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, удовлетворяющая равенству

$$a_1 - 2a_2 + 4a_3 - 8a_4 + \ldots + (-2)^{n-1}a_n = 0.$$

4. Прямая PK касается окружности S с центром O в точке K. Точка R лежит на отрезке PK. На описанной окружности треугольника PRO нашлась точка Q такая, что $OP = OQ$. Докажите, что прямая RM касается S.

5. Аня и Боря играют в игру на клетчатом прямоугольнике 2022×2022. Сначала Аня красит стороны некоторых клеток в красный цвет так, чтобы ни у какой клетки не нашлось двух соседних красных сторон. Затем Боря должен закрасить несколько сторон клеток синим цветом так, чтобы получился путь между двумя какими-то углами прямоугольника. Если у Бори получится путь, он победит, иначе побеждает Аня. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

6. Найдите все натуральные n, для которых число

$$\left[\frac{n}{2^0}\right] \cdot \left[\frac{n}{2^1}\right] \ldots \left[\frac{n}{2^k}\right] + 2$$

является квадратом натурального числа, где k – целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$.

7. Произведение положительных чисел a, b и c равно $1/8$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geqslant \frac{15}{16}.$$

8. Таблица 3×3 заполнена попарно различными натуральными числами, большими 100, так, что в каждой строке и в каждом столбце среднее число равно сумме двух крайних. Какое наименьшее число может стоять в центральной клетке?