XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Гранд». Второй тур. 15.09.2022.

1. Для натуральных чисел $n < m$ обозначим через $s(n, m)$ количество натуральных чисел a, взаимно простых с m и таких, что $n \le a < m$. Найдите все натуральные $m > 1$ такие, что число $2022^m + 1$ делится на m, и при этом неравенство

$$\frac{s(n,m)}{m-n} \geq \frac{s(1,m)}{m}$$

выполнено при всех $n = 1, 2, \ldots, m - 1$.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть H — проекция точки A на BC, а A' — точка, симметричная точке A относительно BC. Точка P выбрана на стороне CD, а точка K — на описанной окружности треугольника ABH так, что $HK \parallel A'P$. Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ADP.

3. Для любого натурального n обозначим через $f(n)$ количество перестановок $(p_1, p_2, \ldots, p_{6^n})$ чисел $1, 2, \ldots, 6^n$ таких, что для всех чисел $1 \le i \le 6^n - 1$ число p_i делится на i. Докажите, что $f(n) \leqslant (2 + \sqrt{2})^{2n}$.

4. Для каких натуральных $n > 1$ можно покрасить некоторые натуральные числа, не превосходящие n, в красный или синий цвета (должны присутствовать как красные, так и синие числа; одно число не может быть покрашено в оба цвета) так, чтобы для каждого натурального числа $k \leqslant n$ выполнялось ровно одно из трёх условий: (a) k — синее; (b) k — красное; (c) существуют синее число a и красное число b такие, что $a + b - k$ делится на n?

5. Для каждого натурального k обозначим $c(k)$ наибольший точный куб, не превосходящий k. Последовательность a_0, a_1, a_2, ... такова, что $a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n)$ при всех целых неотрицательных n. Найдите все натуральные a_0, для которых такая последовательность ограничена.

6. Турнир по волейболу среди 2022 команд проводится по улучшенной швейцарской системе. Сначала по итогам предварительных мероприятий команды занимают различные места от 1 до 2022, и команда с местом n получает $2022 - n$ очков (при $n = 1, 2, \ldots, 2022$). Затем проходит произвольное количество туров. Перед каждым туром команды сортируют по неубыванию очков, после чего в этом туре первая команда играет со второй, третья с четвёртой и т.д. Победитель в каждой встрече получает 1 очко, проигравший — 0 очков, ничьих в волейболе не бывает. Какое наибольшее количество команд по итогам турнира может поделить первое место (то есть набрать максимальное число очков)?

7. Пусть $P(x) = x^2 - 3x + 1$ и

$$Q(x) = P(x)P(x^3)P(x^5)\ldots P(x^{1001}).$$

Найдите сумму модулей коэффициентов многочлена $Q(x)$.

8. На олимпиаду приехало 100 учеников, некоторые из которых знакомы. Оказалось, что у любых двух незнакомых найдётся хотя бы семь общих знакомых. Докажите, что можно выбрать группу из хотя бы 14 учеников и рассадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком со своими соседями

9. У Васи есть доска $n \times n$. Вася желает разместить на ней $2n - 1$ слонов, не бьющих друг друга. С этой целью он решил поставить на одну из клеток фишку, через которую слоны не бьют. Сколькими способами он может поставить эту фишку так, чтобы его желание о расстановке $2n-1$ слонов стало осуществимо? (Сама фишка никого не бьет, а только мешает слонам бить друг друга.)

10. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF, пересекающиеся в точке H. Пусть O — центр описанной окружности ω. Касательные к окружности ω, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке T. Точки K и L симметричны точке O относительно AB и AC соответственно. Окружности (DFK) и (DEL) пересекаются в точке P, отличной от D. Докажите, что точки P, D, T лежат на одной прямой.