XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Премьер». Второй тур. 15.09.2022.

1. Сколько существует перестановок $(p_1, p_2, \ldots, p_{3^{10}})$ чисел $1, 2, \ldots, 3^{10}$ таких, что для всех чисел $1 \le i \le 3^{10} - 1$ число p_i делится на i?

2. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка E, а на продолжении стороны AC за точку C отмечена точка F таким образом, что $BF = CE$. Отрезки BF и CE пересекаются в точке D. Докажите, что если точка D равноудалена от центров описанных окружностей треугольников ABF и ACE, то $AB = AC$.

3. Для каких натуральных $n > 1$ можно покрасить некоторые натуральные числа, не превосходящие n, в красный или синий цвета (причём должны быть хотя бы одно красное и хотя бы одно синее число) так, чтобы для каждого натурального числа $k \leqslant n$ выполнялось ровно одно из трёх условий: (a) k — синее; (b) k — красное; (c) существуют синее число a и красное число b такие, что $a + b - k$ делится на n?

4. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ как-то разбит на квадратики 2×2 и прямоугольники 1×3. Докажите, что количество способов положить доминошку 1×2 так, чтобы одна её клетка попала в квадрат 2×2, а вторая – в прямоугольник 1×3, чётно. (Все прямоугольники в условии могут располагаться как горизонтально, так и вертикально.)

5. Для отрезка натурального ряда от n до m включительно посчитаем, сколько в этом отрезке чисел, взаимно простых с m. Обозначим эту величину через $s(n, m)$. Надя задумала натуральное число $m > 1$. Оказалось, что $\frac{s(n,m)}{m-n} \ge \frac{s(1,m)}{m}$ для всех $n = 1, 2, \ldots, m - 1$. Докажите, что Надино число — степень простого числа.

6. У Васи есть доска $n \times n$. Вася желает разместить на ней $2n-1$ слонов, не бьющих друг друга. С этой целью он решил поставить на одну из клеток фишку, через которую слоны не бьют. Сколькими способами он может поставить эту фишку так, чтобы его желание о расстановке $2n-1$ слонов стало осуществимо? (Сама фишка никого не бьет, а только мешает слонам бить друг друга.)

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть H — проекция точки A на BC, а A' — точка, симметричная точке A относительно BC. Точка P выбрана на стороне CD, а точка K — на описанной окружности треугольника ABH так, что $HK \parallel A'P$. Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ADP.

8. Для положительных a, b и c таких, что $a^5 + b^5 + c^5 = ab^2 + bc^2 + ca^2$, докажите неравенство
$$\frac{a^2+b^2}{b} + \frac{b^2+c^2}{c} + \frac{c^2+a^2}{a} \ge 2(ab + bc + ca).$$