XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Высшая старт-лига. 2 тур. 15.09.2022.

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что прямые, проведённые через A_1 и B_1 перпендикулярно AB, либо обе касаются вписанной окружности треугольника ABC, либо обе её не касаются.

2. Найдите все значения, которые может принимать выражение $ab + bc + cd + da$, если вещественные числа a, b, c, d удовлетворяют двум уравнениям $2a-5b+2c-5d = 4$, $3a+4b+3c+3d = 6$.

3. Для каждого натурального k обозначим $c(k)$ наибольший точный куб, не превосходящий k. Последовательность a_0, a_1, a_2, …такова, что $a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n)$ при всех целых неотрицательных n. Оказалось, что для всех n число $a_n < 1000000$. Для каких a_0 это верно?

4. Дан пятиугольник $ABCDE$ такой, что $ABDE$ — параллелограмм и $\angle BCA = \angle CBD$, $\angle ECD = \angle CDB$. Пусть M и N — середины AB и DE соответственно, P и Q точки пересечения BD с AC и CE соответственно. Докажите, что MP и NQ пересекаются на биссектрисе угла ACE.

5. Сколько существует перестановок $(p_1, p_2, \ldots, p_{3^{10}})$ чисел $1, 2, \ldots, 3^{10}$ таких, что для всех чисел $1 \leqslant i \leqslant 3^{10} - 1$ число p_i делится на i?

6. Вася желает разместить 11 слонов на доске 6×6, не бьющих друг друга. Так как это невозможно, он решил поставить на одну из клеток фишку, через которую слоны не бьют. Сколькими способами он может поставить эту фишку так, чтобы его желание о расстановке 11 слонов стало осуществимо? (Сама фишка никого не бьет, а только мешает слонам друг друга бить.)

7. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ как-то разбит на квадратики 2×2 и прямоугольники 1×3. Докажите, что количество способов положить доминошку 1×2 так, чтобы одна её клетка попала в квадрат 2×2, а вторая – в прямоугольник 1×3, чётно. (Все прямоугольники в условии могут располагаться как горизонтально, так и вертикально.)

8. Пусть a, b и c – попарно различные натуральные числа. Докажите, что $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc+a+b+c$. При каких наборах достигается равенство?

XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Первая старт-лига. 2 тур. 15.09.2022.

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что прямые, проведённые через A_1 и B_1 перпендикулярно AB, либо обе касаются вписанной окружности треугольника ABC, либо обе её не касаются.

2. Найдите все значения, которые может принимать выражение $ab + bc + cd + da$, если вещественные числа a, b, c, d удовлетворяют двум уравнениям $2a-5b+2c-5d = 4$, $3a+4b+3c+4d = 6$.

3. В ряд выстроились несколько журналистов. Каждый заявил, что он стоит между двумя лжецами. Проанализировав ситуацию, Шерлок Холмс заявил, что честных среди журналистов может быть любое количество от 7 до 11. Сколько всего журналистов в строю? (Каждый журналист либо честный, т.е. всегда говорит правду, либо лжец, т.е. всегда врёт.)

4. Дан пятиугольник $ABCDE$ такой, что $ABDE$ — параллелограмм и $\angle BCA = \angle CBD$, $\angle ECD = \angle CDB$. Пусть M и N — середины AB и DE соответственно, P и Q точки пересечения BD с AC и CE соответственно. Докажите, что MP и NQ пересекаются на биссектрисе угла ACE.

5. Петя хочет переписать числа $2, 3, \ldots, 90, 91$ в другом порядке так, чтобы первое выписанное число делилось на 1, второе — на 2, третье — на 3, и так далее до последнего (которое должно делиться на 90). Сколькими способами он может это сделать?

6. Вася желает разместить 11 слонов на доске 6×6, не бьющих друг друга. Так как это невозможно, он решил поставить на одну из клеток фишку, через которую слоны не бьют. Сколькими способами он может поставить эту фишку так, чтобы его желание о расстановке 11 слонов стало осуществимо? (Сама фишка никого не бьет, а только мешает слонам друг друга бить.)

7. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ как-то разбит на квадратики 2×2 и прямоугольники 1×3. Докажите, что количество способов положить доминошку 1×2 так, чтобы одна её клетка попала в квадрат 2×2, а вторая – в прямоугольник 1×3, чётно. (Все прямоугольники в условии могут располагаться как горизонтально, так и вертикально.)

8. Пусть a, b и c попарно различные натуральные числа. Докажите, что $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc+a+b+c$. При каких наборах достигается равенство?