Семнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 12-20.09.2022

Юниор-лига. 2 тур. 15.09.2022

1. Можно ли некоторые натуральные числа, не превосходящие 2022, раскрасить в красный или синий цвета (причём должны быть хотя бы одно красное и хотя бы одно синее число) так, чтобы для каждого натурального числа k, не превосходящего 2022, выполнялось ровно одно из трёх условий:

(a) k – синее,

(b) k – красное,

(c) существуют синее число a и красное число b такие, что $a+b-k$ делится на 2022?

2. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D прямые. Точка E на стороне BC такова, что $\angle DAC = \angle EAB$. Точка M – середина отрезка CE. Докажите, что $BM = DM$.

3. Для каждого натурального k обозначим $c(k)$ наибольший точный куб, не превосходящий k. Последовательность a_0, a_1, a_2, …такова, что $a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n)$ при всех целых неотрицательных n. Найдите все натуральные a_0, для которых такая последовательность ограничена.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка E, а на продолжении стороны AC за точку C отмечена точка F таким образом, что $BF = CE$. Отрезки BF и CE пересекаются в точке D. Докажите, что если точка D равноудалена от центров описанных окружностей треугольников ABF и ACE, то $AB = AC$.

5. Сколько существует перестановок $(p_1, p_2, \ldots, p_{3^{10}})$ чисел $1, 2, \ldots, 3^{10}$ таких, что для всех чисел $1 \leqslant i \leqslant 3^{10}-1$ число p_i делится на i?

6. Для отрезка натурального ряда от n до m включительно посчитаем, сколько в этом отрезке чисел, взаимно простых с m. Обозначим эту величину через $s(m,n)$. Надя задумала натуральное число $m > 1$. Оказалось, что $\frac{s(n,m)}{m-n} \geqslant \frac{s(1,m)}{m}$ для всех $n = 1, 2, \ldots, m-1$. Докажите, что Надино число – степень простого числа.

7. Найдите все значения, которые может принимать выражение $ab + bc + cd + da$, если вещественные числа a, b, c, d удовлетворяют двум уравнениям $2a - 5b + 2c - 5d = 4$, $3a + 4b + 3c + 3d = 6$.

8. Клетчатый прямоугольник $m \times n$ как-то разбит на квадратики 2×2 и прямоугольники 1×3. Докажите, что количество способов положить доминошку 1×2 так, чтобы одна её клетка попала в квадрат 2×2, а вторая – в прямоугольник 1×3, чётно. (Все прямоугольники в условии могут располагаться как горизонтально, так и вертикально.)