XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Гранд». Третий тур. 17.09.2022.

1. Пусть AH — высота остроугольного треугольника AB; прямая AH пересекает его описанную окружность вторично в точке D. Пусть M — середина BC, а $N \neq A$ — точка на луче AB такая, что $AB = BN$. Прямая HN пересекает окружность (DHM) вторично в точке E. Докажите, что окружность (NBE) касается BC.

2. Пусть m и n — нечётные числа, не меньшие 3. Магнус и Ханс договариваются о серии из mn игр (без ничьих), в каждой из которых Магнус выигрывает с вероятностью $p > 1/2$ (исходы разных игр независимы). Предлагаются два сценария: (1) играются все mn игр, у кого больше побед — тот выиграл; (2) проводится m раундов по n игр; победитель в раунде — тот, кто выиграл в нём больше игр, победитель в серии — тот, кто выиграл больше раундов. Какая из схем выгоднее Магнусу?

3. Вся шахматная доска 2022×2022 заполнена ладьями и слонами. При этом в каждом столбце не все фигуры одинаковы, и в каждой строке не все фигуры одинаковы. Пусть количество пар (ладья, слон), в которых ладья бьет слона, равно A, а количество таких пар, в которых слон бьет ладью, равно B. Найдите наименьшее возможное значение выражения $2A - B$. (Напомним, что фигуры не бьют через другие фигуры.)

4. Вещественные числа $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ таковы, что при любом $k = 1, 2, \dots, n$ выполнено неравенство

$$a_1 + \ldots + a_{k-1} + \sin a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n \geq b_1 + \ldots + b_{k-1} + \sin b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n.$$

Докажите, что $a_1 + \ldots + a_n > b_1 + \ldots + b_n$.

5. На плоскости сидят k точечных мух. Есть мухобойка, представляющая собой объединение черных клеток бесконечной шахматной доски (белые клетки — это дыры). Мухобойку можно сдвигать и поворачивать. Для какого наименьшего k можно гарантированно попасть мухобойкой хотя бы по пяти мухам? Считаем, что если муха попала на границу клетки, то мухобойка по ней попала.

6. Дан вписанный в окружность ω четырехугольник $ABCD$. Пусть P — произвольная точка дуги CD окружности ω не содержащей точек A и B. Биссектрисы углов APB, APC и APD пересекают прямые AB, AC и AD в точках X, Y и Z. Пусть Q — точка, симметричная точке P относительно прямой, соединяющей центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABD. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике XYZ.

7. Найдите все пары натуральных чисел k, m такие, что для любого натурального n произведение $(n + m)(n + 2m) \ldots (n + km)$ делится на $k!$.

8. Коля выбрал неотрицательные вещественные числа $a_1, \dots, a_k$. Изначально перед ним выписан ряд из $n > k$ нулей. Далее он за ход выбирает k чисел, записанных подряд, и добавляет к первому из них a_1, ко второму a_2, …, к k-му — a_k. Через некоторое (ненулевое) число ходов все числа стали равными. Докажите, что среди $a_1, a_2, \dots, a_k$ не больше двух различных.

9. На доске написано число, большее некоторого натурального числа на $1/2$. Каждую минуту, если на доске записано число x, оно заменяется на число $x \cdot ([x] + 2022)$. Могло ли так случиться, что на доске впервые появится целое число ровно через 2022 минуты?

10. Окружность разделена точками на n равных дуг длины 1. Пусть n, a и b — натуральные числа, для которых $a < n$, $b < n$ и $a \neq b$. Блоха начинает прыгать с некоторой точки и делает последовательно $n - 1$ прыжков по часовой стрелке, чередуя прыжки на a и на b (длина прыжка считается по окружности). Для каждого натурального $n > 2$ найдите количество троек (a, b), удовлетворяющих условиям выше, для которых блоха посетит все отмеченные точки.