XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Премьер». Третий тур. 17.09.2022.

1. На доске написано число, большее некоторого натурального числа на $1/2$. Каждую минуту, если на доске записано число x, оно заменяется на число $x \cdot ([x] + 2022)$. Могло ли так случиться, что на доске впервые появится целое число ровно через 2022 минуты?

2. Пусть m и n — нечётные числа, не меньшие 3. Магнус и Ханс договариваются о серии из mn игр (без ничьих), в каждой из которых Магнус выигрывает с вероятностью $p > 1/2$ (исходы разных игр независимы). Предлагаются два сценария: 1) играются все mn игр, у кого больше побед — тот выиграл; 2) Проводится m раундов по n игр; победитель в раунде — тот, кто выиграл в нём больше игр, победитель в серии — тот, кто выиграл больше раундов. Какая из схем выгоднее Магнусу?

3. На плоскости сидят шесть мух. Есть мухобойка, представляющая собой объединение черных клеток бесконечной шахматной доски (белые клетки – это дыры). Можно ли расположить мухобойку так (ее можно сдвигать и поворачивать), чтобы она попала хотя бы по пяти мухам? Мухи это точки; считаем, что если муха попала на границу клетки, то мухобойка по ней попала.

4. Вся шахматная доска 2022×2022 заполнена ладьями и слонами. При этом, в каждом столбце не все фигуры одинаковы, и в каждой строке не все фигуры одинаковы. Они не бьют через фигуры. Пусть количество пар (ладья, слон), в которых ладья бьет слона, равно A, а количество таких пар, в которых слон бьет ладью, равно B. Найдите минимум выражения $2A - B$.

5. Дана окружность ω радиуса R с центром O и точки A и B на ней. Точка P — произвольная точка внутри круга ω, точка Q лежит на луче OP и $OP \cdot OQ = R^2$. Точка S симметрична Q относительно AB. Докажите, что прямые OP и PS симметричны относительно биссектрисы угла APB

6. Вещественные числа a, b, c и d таковы, что
$$\begin{cases} a + \sin b > c + \sin d, \\ \sin a + b > \sin c + d. \end{cases}$$
Докажите, что $a + b > c + d$.

7. Пусть диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Пусть точка N — середина BP и точка M — середина AC. Точка K на отрезке DC такова, что $\angle KAC = \angle NAB$. Докажите, что D, P, M и K лежат на одной окружности.

8. Найдите все бесконечные последовательности $a_1, a_2, \ldots$ состоящие из натуральных чисел такие, что
$$a_{n+m} = \frac{nm}{a_n} + \frac{nm}{a_m}.$$