XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Высшая старт-лига. 3 тур. 17.09.2022.

1. Вычислите сумму:

$$\sqrt{5+\sqrt{5^2-9}}-\sqrt{11+\sqrt{11^2-9}}+\sqrt{17+\sqrt{17^2-9}}-$$
$$-\sqrt{23+\sqrt{23^2-9}}+\ldots+\sqrt{797+\sqrt{797^2-9}}.$$

2. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник, у которого один из углов равен 45°. Вася отметил у этого треугольника красным фломастером середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с точкой пересечения высот. Докажите, что какие-то 8 из 9 красных точек являются вершинами двух квадратов.

3. На плоскости сидят шесть мух. Есть мухобойка, представляющая собой объединение черных клеток бесконечной шахматной доски (белые клетки — это дыры). Можно ли расположить мухобойку так (ее можно сдвигать и поворачивать), чтобы она попала хотя бы по пяти мухам? Мухи — это точки; считаем, что если муха попала на границу клетки, то мухобойка по ней попала.

4. Для четырёхугольника $ABCD$ выполняется, что

$$BC=CA,\quad \angle CDB=31^\circ,\quad \angle CBD=30^\circ,\quad \angle ACD=3^\circ.$$

Найдите $\angle CAD$ (ответ должен быть выражен в градусах).

5. На доске написано число, большее некоторого натурального числа на $1/2$. Каждую минуту число на доске умножают на наименьшее целое число, не меньшее его. Могло ли так случиться, что на доске впервые появится целое число ровно через 2022 минуты?

6. Окружность разделена точками на n равных дуг длины 1, где n — нечетно. Пусть a и b — натуральные числа, для которых $a<n$, $b<n$ и $a\neq b$. Блоха начинает прыгать с некоторой точки и делает последовательно $n-1$ прыжков по часовой стрелке, чередуя прыжки на a и на b (длина прыжка считается по окружности). Для каждого натурального $n>2$ найдите количество пар (a,b), удовлетворяющих условиям выше, для которых блоха посетит все отмеченные точки.

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=1$. Докажите, что

$$\frac{10+2b+5c}{1+a}+\frac{10+2c+5a}{1+b}+\frac{10+2a+5b}{1+c}\geqslant\frac{111}{4}.$$

8. Дано натуральное число $n>2$. В каждой клетке таблицы $n\times n$ записано натуральное число. При каких n могло так оказаться, что для каждой клетки сумма чисел в соседних с ней по стороне клетках нечётна?

XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Первая старт-лига. 3 тур. 17.09.2022.

1. Вычислите сумму:

$$\sqrt{5+\sqrt{5^2-9}}-\sqrt{11+\sqrt{11^2-9}}+\sqrt{17+\sqrt{17^2-9}}-$$
$$-\sqrt{23+\sqrt{23^2-9}}+\ldots+\sqrt{797+\sqrt{797^2-9}}.$$

2. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник, у которого один из углов равен 45°. Вася отметил у этого треугольника красным фломастером середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с точкой пересечения высот. Докажите, что какие-то 8 из 9 красных точек являются вершинами двух квадратов.

3. На плоскости сидят шесть мух. Есть мухобойка, представляющая собой объединение черных клеток бесконечной шахматной доски (белые клетки — это дыры). Можно ли расположить мухобойку так (ее можно сдвигать и поворачивать), чтобы она попала хотя бы по пяти мухам? Мухи — это точки; считаем, что если муха попала на границу клетки, то мухобойка по ней попала.

4. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и BC отмечены соответственно точки P и Q (не совпадающие с вершинами) так, что середина M отрезка PQ лежит на одной из средних линий треугольника ABC. Докажите, что проекция отрезка PQ на прямую AC в 2 раза короче стороны AC.

5. В каждом из двух больших домов живёт по 128 человек. Закон о реновации позволяет провести операцию: выбрать одинаковое количество жильцов в обоих домах и переселить тех, кто жил в первом доме, во второй, а тех, кто жил во втором — в первый. За какое наименьшее количество операций удастся добиться того, чтобы каждые два жильца хотя бы раз оказались в разных домах?

6. Окружность разделена точками на n равных дуг длины 1, где n — нечетное простое. Пусть a и b — натуральные числа, для которых $a<n$, $b<n$ и $a\neq b$. Блоха начинает прыгать с некоторой точки и делает последовательно $n-1$ прыжков по часовой стрелке, чередуя прыжки на a и на b (длина прыжка считается по окружности). Для каждого нечетного простого $n>2$ найдите количество пар (a,b), удовлетворяющих условиям выше, для которых блоха посетит все отмеченные точки.

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=1$. Докажите, что

$$\frac{7+2b+5c}{1+a}+\frac{7+2c+5a}{1+b}+\frac{7+2a+5b}{1+c}\geqslant 21.$$

8. В каждой клетке таблицы 17×17 записано натуральное число. Могло ли так оказаться, что для каждой клетки сумма чисел в соседних с ней по стороне клетках нечетна?