XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Гранд». Полуфинал. 18.09.2022.

1. Внутри круглого бильярдного стола отмечены две точки S и F, причём прямая SF не проходит через центр круга; в точке S стоит шар. Его можно ударить, чтобы он один раз отразился относительно границы стола (по закону «угол падения равен углу отражения») и попал в F. Точка, в которой может произойти такое отражение, называется *удачной*. Найдите наибольшее возможное количество удачных точек.

2. В треугольнике ABC точки D, E и F выбраны на сторонах BC, CA и AB соответственно так, что AD, BE и CF пересекаются в одной точке (обозначим эту точку P) . Окружности (AFE) и (CDE) пересекаются в точке T. Докажите, что окружности $(ATD), (BTE), (CTF)$ имеют общую радикальную ось.

3. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$. Известно, что ни одно из них не делится на другое. Докажите, что существует такое натуральное k, что при любом натуральном s среди разностей $a_s - a_0$, $a_{s+1} - a_1$, $\ldots$, $a_{s+k} - a_k$ есть различные.

4. Найдите наименьшее вещественное число C такое, что для любого натурального n и любых положительных $a_1, \ldots, a_n$ верно неравенство

$$\frac{a_1}{\sqrt[3]{a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_1 + a_2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt[3]{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}} \leqslant C\sqrt[3]{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}.$$

5. В городе нет семи людей, любые два из которых дружат. Назовём 4 людей, любые два из которых дружат, *бригадой*. Оказалось, что любые две бригады имеют общего человека. Докажите, что можно выбрать трёх человек так, что в любой бригаде присутствует хотя бы один из них.

6. Пусть n — положительное целое число. Есть n фиолетовых и n белых коров, стоящих в очереди в определенном порядке. Тим хочет отсортировать коров по цвету, чтобы все фиолетовые коровы были в начале очереди. На каждом этапе ему разрешается менять местами только две соседние группы из равного количества последовательных коров. Какое минимальное количество шагов нужно Тиму, чтобы выполнить свое желание, независимо от первоначального расположения коров?

7. Найдите все бесконечные неубывающие последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такие, что числа $a_n + n + 1$ и $a_{a_n} - a_n$ являются квадратами натуральных чисел при всех натуральных n.

8. Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников, раскрашенных в чёрный и белый цвета. При этом одноцветные многоугольники не имеют общих точек, кроме вершин. Обязательно ли хотя бы один из многоугольников разбиения - треугольник?

9. Числа a и b удовлетворяют равенству $ab + \sqrt{ab + 1} + \sqrt{a^2 + b}\sqrt{a + b^2} = 0$. Чему может быть равно выражение $|b\sqrt{a^2 + b} + a\sqrt{b^2 + a}|$?

10. Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC; точки M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, CA, AB соответственно; A_l, B_l, C_l — точки пересечения Ω с лучами M_cM_b, M_aM_c, M_bM_a соответственно; A_r, B_r, C_r — точки пересечения Ω с лучами M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b соответственно. Докажите, что среднее арифметическое площадей треугольников $A_lB_lC_l$ и $A_rB_rC_r$ не меньше площади треугольника ABC.

XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Гранд». Четвёртый тур. 18.09.2022.

1. Внутри круглого бильярдного стола отмечены две точки S и F, причём прямая SF не проходит через центр круга; в точке S стоит шар. Его можно ударить, чтобы он один раз отразился относительно границы стола (по закону «угол падения равен углу отражения») и попал в F. Точка, в которой может произойти такое отражение, называется *удачной*. Найдите наибольшее возможное количество удачных точек.

2. На окружности ω зафиксирована точка A, а внутри — точка P. Переменная хорда BC окружности ω проходит через точку P. Докажите, что окружности девяти точек всевозможных треугольников ABC касаются фиксированной окружности, не зависящей от выбора хорды BC.

3. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$. Известно, что ни одно из них не делится на другое. Докажите, что существует такое натуральное k, что при любом натуральном s среди разностей $a_s - a_0$, $a_{s+1} - a_1$, $\ldots$, $a_{s+k} - a_k$ есть различные.

4. Найдите все тройки (a, b, c) положительных чисел, для которых выражение

$$\frac{(a+b)(a+c)(a+b+c)}{abc}$$

принимает свое наименьшее значение.

5. На конференцию приехало $n \geq 3$ ученых. Некоторые ученые дружат друг с другом (дружба всегда взаимна, никто не дружит сам с собой). Известно, что при любом разбиении ученых на две непустые группы найдутся два ученых из одной группы, которые дружат, а также два ученых из разных групп, которые дружат. В первый день конференции ученые вносят свои предложения по некоторому вопросу. Предложение каждого ученого — целое неотрицательное число. Каждый день, начиная со второго, каждый ученый изменяет своё предложение на целую часть от среднего арифметического предложений его друзей в предыдущий день. Докажите, что через несколько дней предложения всех ученых станут одинаковыми.

6. Пусть n — положительное целое число. Есть n фиолетовых и n белых коров, стоящих в очереди в определенном порядке. Тим хочет отсортировать коров по цвету, чтобы все фиолетовые коровы были в начале очереди. На каждом этапе ему разрешается менять местами только две соседние группы из равного количества последовательных коров. Какое минимальное количество шагов нужно Тиму, чтобы выполнить свое желание, независимо от первоначального расположения коров?

7. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых число

$$\frac{a^2(b-a)}{b+a}$$

является квадратом простого числа.

8. Числа a и b удовлетворяют равенству $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0$. Чему может быть равно выражение $|b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}|$?

9. Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников, раскрашенных в чёрный и белый цвета. При этом одноцветные многоугольники не имеют общих точек, кроме вершин. Обязательно ли хотя бы один из многоугольников разбиения - треугольник?

10. Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC; точки M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, CA, AB соответственно; A_l, B_l, C_l — точки пересечения Ω с лучами M_cM_b, M_aM_c, M_bM_a соответственно; A_r, B_r, C_r — точки пересечения Ω с лучами M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b соответственно. Докажите, что среднее арифметическое площадей треугольников $A_lB_lC_l$ и $A_rB_rC_r$ не меньше площади треугольника ABC.