XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Премьер». Полуфинал. 18.09.2022.

1. Числа a и b удовлетворяют равенству $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0$. Чему может быть равно выражение $|b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}|$?

2. Пусть $\pi(x)$ – это количество простых чисел, не превосходящих x, а p_k – k-е простое число. Для натурального m положим $n = m + p_m$ и определим последовательность (x_k) условиями $x_1 = \pi(n)$, $x_{k+1} = \pi(n - x_k)$ при всех натуральных k. Докажите, что $x_k = m$ при всех k, начиная с некоторого.

3. На конференцию приехало $n \geq 3$ ученых. Некоторые ученые дружат (дружба всегда взаимна, никто не дружит сам с собой). Известно, что при любом разбиении ученых на две непустые группы найдутся два ученых из одной группы, которые дружат, а также два ученых из разных групп, которые дружат. В первый день конференции ученые вносят свои предложения по некоторому вопросу. Предложение каждого ученого — целое неотрицательное число. Каждый день, начиная со второго, каждый ученый заменяет своё предложение на целую часть среднего арифметического предложений его друзей в предыдущий день. Докажите, что через несколько дней предложения всех ученых станут одинаковыми.

4. На окружности ω зафиксирована точка A. Хорды BC окружности ω выбираются так, что проходят через фиксированную точку P. Докажите, что окружности 9 точек треугольников ABC касаются фиксированной окружности, не зависящей от выбора BC.

5. На водопое n фиолетовых и n белых коров, стоят в очереди в определенном порядке. Тим хочет отсортировать коров по цвету, чтобы все фиолетовые коровы были в начале очереди. На каждом шаге ему разрешается менять местами две соседние группы из равного количества последовательных коров, сохраняя при этом порядок коров внутри групп. Какое минимальное количество шагов нужно Тиму, чтобы выполнить своё желание, независимо от первоначального расположения коров?

6. На ребрах AC, AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ взяты точки P, Q, R, S так, что PR и QS пересекаются в точке N и PS и QR пересекаются в точке M. Прямая MN пересекает плоскость ABC в точке L. Докажите, что прямые AL, BP и CQ пересекаются.

7. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ – квадрат простого числа.

8. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$. Известно, что ни одно из них не делится на другое. Докажите, что существует такое натуральное k, что при любом натуральном s среди разностей $a_s - a_0$, $a_{s+1} - a_1$, $\ldots$, $a_{s+k} - a_k$ есть различные.

XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Премьер». Бой за 5-6 места. 18.09.2022.

1. Числа a и b удовлетворяют равенству $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0$. Чему может быть равно выражение $|b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}|$?

2. Пусть $\pi(x)$ – это количество простых чисел, не превосходящих x, а p_k – k-е простое число. Для натурального m положим $n = m + p_m$ и определим последовательность (x_k) условиями $x_1 = \pi(n)$, $x_{k+1} = \pi(n - x_k)$ при всех натуральных k. Докажите, что $x_k = m$ при всех k, начиная с некоторого.

3. На конференцию приехало $n \geq 3$ ученых. Некоторые ученые дружат (дружба всегда взаимна, никто не дружит сам с собой). Известно, что при любом разбиении ученых на две непустые группы найдутся два ученых из одной группы, которые дружат, а также два ученых из разных групп, которые дружат. В первый день конференции ученые вносят свои предложения по некоторому вопросу. Предложение каждого ученого — целое неотрицательное число. Каждый день, начиная со второго, каждый ученый заменяет своё предложение на целую часть среднего арифметического предложений его друзей в предыдущий день. Докажите, что через несколько дней предложения всех ученых станут одинаковыми.

4. На окружности ω зафиксирована точка A. Хорды BC окружности ω выбираются так, что проходят через фиксированную точку P. Докажите, что окружности 9 точек треугольников ABC касаются фиксированной окружности, не зависящей от выбора BC.

5. На водопое n фиолетовых и n белых коров, стоят в очереди в определенном порядке. Тим хочет отсортировать коров по цвету, чтобы все фиолетовые коровы были в начале очереди. На каждом шаге ему разрешается менять местами две соседние группы из равного количества последовательных коров, сохраняя при этом порядок коров внутри групп. Какое минимальное количество шагов нужно Тиму, чтобы выполнить своё желание, независимо от первоначального расположения коров?

6. На ребрах AC, AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ взяты точки P, Q, R, S так, что PR и QS пересекаются в точке N и PS и QR пересекаются в точке M. Прямая MN пересекает плоскость ABC в точке L. Докажите, что прямые AL, BP и CQ пересекаются.

7. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ – квадрат простого числа.

8. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$. Известно, что ни одно из них не делится на другое. Докажите, что существует такое натуральное k, что при любом натуральном s среди разностей $a_s - a_0$, $a_{s+1} - a_1$, $\ldots$, $a_{s+k} - a_k$ есть различные.

XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Премьер». Бой за 7-8 места. 18.09.2022.

1. Точки K и L внутри треугольника ABC и точка D на стороне AB выбраны так, что B, K, L, C лежат на одной окружности. При этом $\angle AKD = \angle BCK$ и $\angle ALD = \angle BCL$. Докажите, что $AK = AL$.

2. На конференцию приехало $n \geq 3$ ученых. Некоторые ученые дружат (дружба всегда взаимна, никто не дружит сам с собой). Известно, что при любом разбиении ученых на две непустые группы найдутся два ученых из одной группы, которые дружат, а также два ученых из разных групп, которые дружат. В первый день конференции ученые вносят свои предложения по некоторому вопросу. Предложение каждого ученого — целое неотрицательное число. Каждый день, начиная со второго, каждый ученый заменяет своё предложение на целую часть среднего арифметического предложений его друзей в предыдущий день. Докажите, что через несколько дней предложения всех ученых станут одинаковыми.

3. Существует ли натуральное $k > 100$ такое, что среди чисел $C_k^k, C_{2k}^k, C_{3k}^k, \ldots C_{k^2}^k$ встретятся не все возможные остатки при делении на k?

4. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ – квадрат простого числа.

5. Пусть M середина стороны AD, N середина стороны CD вписанного четырехугольника $ABCD$. Прямая CM вторично пересекает окружность (ABC) в точке F. Прямые BF и MN пересекаются в точке E. Прямая AE вторично пересекает окружность (ABC) в точке K. Докажите, что $\angle ACB = \angle CKM$.

6. Двое по очереди закрашивают на доске 9×10 клетку, доминошку или уголок из трех клеток. Закрашивать можно только не закрашенные ранее клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Числа a и b удовлетворяют равенству $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0$. Чему может быть равно выражение $|b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}|$?

8. Дано натуральное $n > 2$. На каждой из $n+1$ граней n-угольной пирамиды написано число 0. Разрешается выбрать вершину и либо прибавить по 1 к числам на всех гранях, сходящихся в этой вершине, либо вычесть по 1 из всех этих чисел. При каких n можно сделать все числа равными 1?