

Высшая старт-лига. Полуфинал. 18.09.2022.

1. Дан остроугольный треугольник ABC . На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены квадраты $ABKL$ и $BCMN$. Точка O — середина отрезка LM . Докажите, что расстояние от точки O до прямой AC в два раза меньше длины отрезка AC .

2. Найдите все такие тройки целых ненулевых чисел (a, b, c) , что верны следующие равенства:

$$a^3 + a^2 + b^2 = 0; \quad b^3 + b^2 + c^2 = 0; \quad c^3 + c^2 + a^2 = 0.$$

3. На отрезке AC отмечена точка B . Циркулем и линейкой постройте точку D такую, что $\angle ACD = 90^\circ$ и $\angle ADB = 2\angle CAD$.

4. Найдите все тройки (a, b, c) положительных чисел, для которых выражение

$$\frac{(a+b)(a+c)(2a+b+c)}{abc}$$

принимает свое наименьшее значение.

5. На конференцию приехало $n \geq 3$ ученых. Некоторые ученые дружат друг с другом (дружба всегда взаимна, никто не дружит сам с собой). Известно, что при любом разбиении ученых на две непустые группы найдутся два ученых из одной группы, которые дружат, а также два ученых из разных групп, которые дружат. В первый день конференции ученые вносят свои предложения по некоторому вопросу. Предложение каждого ученого — целое неотрицательное число. Каждый день, начиная со второго, каждый ученый изменяет своё предложение на целую часть от среднего арифметического предложений его друзей в предыдущий день. Докажите, что через несколько дней предложения всех ученых станут одинаковыми.

6. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ — квадрат простого числа.

7. Дано натуральное $n > 2$. На каждой из $n + 1$ граней n -угольной пирамиды написано число 0. Разрешается выбрать вершину и либо прибавить по 1 к числам на всех гранях, сходящихся в этой вершине, либо вычесть по 1 из всех этих чисел. При каких n можно сделать все числа равными 1?

8. Сто фиолетовых и сто белых коров стоят в очереди на водопой. Тим может выбрать любую группу из чётного числа коров, стоящих подряд, и поменять местами первую половину этой группы со второй половиной (сохранив порядок коров в группах). Какое наименьшее количество таких операций заведомо позволит Тиму добиться того, чтобы все фиолетовые коровы оказались в начале очереди?

Первая старт-лига. 4 тур.
Высшая старт-лига. Бой за 5 место.
18.09.2022.

1. Дан остроугольный треугольник ABC . На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены квадраты $ABKL$ и $BCMN$. Точка O — середина отрезка LM . Докажите, что расстояние от точки O до прямой AC в два раза меньше длины отрезка AC .

2. Найдите все такие тройки целых ненулевых чисел (a, b, c) , что верны следующие равенства:

$$a^3 + a^2 + b^2 = 0; \quad b^3 + b^2 + c^2 = 0; \quad c^3 + c^2 + a^2 = 0.$$

3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD , при этом $AB + CD = AD$. Диагонали трапеции пересекаются в точке E . На стороне AD отметили точку F такую, что $EF \parallel AB$. Докажите, что угол BFC прямой.

4. В клане Дона Корлеоне 100 человек, причём Дон Корлеоне может связаться с каждым, возможно по цепочке знакомых. Каждый член клана знает ровно пятерых других членов клана. Каким наибольшим может быть количество мафиози, попарно не знающих друг друга?

5. Двое по очереди закрашивают на доске 9×10 клетку, доминошку или уголок из трех клеток. Закрашивать можно только не закрашенные ранее клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ — квадрат простого числа.

7. Дано натуральное $n > 2$. На каждой из $n + 1$ граней n -угольной пирамиды написано число 0. Разрешается выбрать вершину и либо прибавить по 1 к числам на всех гранях, сходящихся в этой вершине, либо вычесть по 1 из всех этих чисел. При каких n можно сделать все числа равными 1?

8. Сто фиолетовых и сто белых коров стоят в очереди на водопой. Тим может выбрать любую группу из чётного числа коров, стоящих подряд, и поменять местами первую половину этой группы со второй половиной (сохранив порядок коров в группах). Какое наименьшее количество таких операций заведомо позволит Тиму добиться того, чтобы все фиолетовые коровы оказались в начале очереди?