Семнадцатый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 12-20.09.2022

Юниор-лига. 4 тур. 18.09.2022

1. Пусть $\pi(x)$ – это количество простых чисел, не превосходящих x, а p_k – k-е простое число. Для натурального m положим $n = m + p_m$ и определим последовательность (x_k) условиями $x_1 = \pi(n)$, $x_{k+1} = \pi(n - x_k)$ при всех натуральных k. Докажите, что $x_k = m$ при всех k, начиная с некоторого.

2. Точка M — середина стороны BC остроугольного треугольника ABC. Внутри этого треугольника нашлась точка P такая, что $\angle BPC + \angle BAC = 180^\circ$ и $\angle ABP = \angle CPM$. Пусть $PM = 3$, $AC = 10$. Найдите длину стороны BC.

3. 100 фиолетовых и 100 белых коров стоят в очереди на водопой. Тим может выбрать любую группу из чётного числа коров, стоящих подряд, и поменять местами первую половину этой группы со второй половиной (сохранив порядок коров в группах). Какое наименьшее количество таких операций заведомо позволит Тиму добиться того, чтобы все фиолетовые коровы оказались в начале очереди?

4. Числа a и b удовлетворяют условию $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0$. Чему может быть равно выражение $|b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}|$?

5. На конференцию приехало $n \geqslant 3$ ученых. Некоторые ученые дружат (дружба всегда взаимна, никто не дружит сам с собой). Известно, что при любом разбиении ученых на две непустые группы найдутся два ученых из одной группы, которые дружат, а также два ученых из разных групп, которые дружат. В первый день конференции ученые вносят свои предложения по некоторому вопросу. Предложение каждого ученого – целое неотрицательное число. Каждый день, начиная со второго, каждый ученый заменяет своё предложение на целую часть среднего арифметического предложений его друзей в предыдущий день. Докажите, что через несколько дней предложения всех ученых станут одинаковыми.

6. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ – квадрат простого числа.

7. На каждой из $n+1$ граней n-угольной пирамиды написано число 0. Разрешается выбрать вершину и либо прибавить по 1 к числам на всех гранях, сходящихся в этой вершине, либо вычесть по 1 из всех этих чисел. Можно ли при каком-либо n сделать все числа равными 1?

8. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, BC, CD и DA вписанного четырёхугольника $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке T. Описанные окружности треугольников MTQ и NTP вторично пересекаются в точке K. Докажите, что $TK \perp AC$.