XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Гранд». Финал. 19.09.2022.

1. Дан связный граф. Известно, что если из него выбросить *рёбра* любого нечётного цикла, он перестанет быть связным. Докажите, что его вершины можно правильно окрасить в три цвета.

2. На доске записан приведённый квадратный трёхчлен с вещественными коэффициентами. За ход трёхчлен $p(x) = x^2 + ax + b$ можно заменить либо на $p(x + x_0)$ (для произвольного вещественного x_0), либо на трёхчлен $x^2 + bx + a$. Найдите наименьшее k такое, что из любого начального приведённого квадратного трёхчлена можно получить любой другой не более, чем за k ходов.

3. Для натурального n через $\mathrm{rad}(n)$ обозначается произведение всех простых чисел, делящих n; при этом $\mathrm{rad}(1) = 1$. Пусть $p > q > 2$ — простые числа. Последовательность $a_1, a_2, \dots$ задана как

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = \frac{\mathrm{rad}(pa_n)}{p} + \frac{\mathrm{rad}(qa_{n+1})}{q} \quad \text{при } n \geqslant 1.$$

Оказалось, что эта последовательность периодична (возможно, с предпериодом), то есть для некоторых натуральных T и n_0 выполнено равенство $a_{n+T} = a_n$ при всех $n \geqslant n_0$. Докажите, что T делится на 3.

4. Клеточный прямоугольник без одной угловой клетки (дырки) разбили на трехклеточные уголки-плитки. Разрешается вынуть одну плитку и положить её обратно на свободные клетки прямоугольника, возможно, повернув её перед этим (границы плитки должны идти по линиям сетки). Такую операцию разрешается проделать сколько угодно раз, при этом дырка перемещается по прямоугольнику. Верно ли, что дырку обязательно можно переместить в противоположный угол прямоугольника?

5. На плоскости отмечены $n \geqslant 8$ точек. Известно, что среди любых 8 отмеченных точек найдутся четыре точки, лежащие на одной прямой. При каких n отсюда следует, что можно либо стереть одну отмеченную точку так, чтобы все оставшиеся лежали на двух прямых, либо стереть 4 точки так, чтобы оставшиеся лежали на одной прямой?

6. Обозначим через $\mathbb{R}^+$ множество всех положительных вещественных чисел. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ выполнено равенство

$$f(x + f(y) + f(f(z))) = z + f(y + f(x)).$$

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть I — точка пересечения его биссектрис, а K — середина меньшей дуги BC его описанной окружности Ω. На касательной, проведенной к Ω в точке K, взята произвольная точка P. Прямая PI вторично пересекает окружность (PBC) в точке Q, причём точка I лежит на отрезке PQ. Докажите, что $\angle AQP + \angle QPK = 180^\circ$.

8. Теренс выписал несколько различных строк длины 100, состоящих из нулей и единиц. Оказалось, что если в выписанной строке заменить любую единицу на ноль, то полученная строка также выписана. Пусть N_+ — количество выписанных строк, суммы элементов которых чётны, а N_- — количество тех выписанных строк, суммы которых нечётны. Какое наибольшее значение может принимать $N_+ - N_-$?.

9. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Окружность γ_b касается отрезков AB, BC и пересекает отрезок AC в точках X и Y. Окружность γ_d касается отрезков AD, DC и также проходит через точки X и Y. Окружность ω_b лежит внутри треугольника ABC, касается окружности γ_b и касается отрезка XY в точке Z. Аналогично, окружность ω_d лежит внутри треугольника ADC, касается окружности γ_d и касается отрезка XY в точке Z. Докажите, что отношение радиусов окружностей ω_b и ω_d равно отношению радиусов вписанных окружностей треугольников ABC и ADC.

10. Назовем натуральное число *забавным*, если после приписывания к его десятичной записи слева нуля и десятичной запятой значение получившейся дроби оказывается равно среднему арифметическому всех цифр этого числа в десятичной записи. Например, число $5\underbrace{00\ldots0}_{9\text{ нулей}}$ является забавным, так как среднее арифметическое его цифр равно 0,5. Докажите, что множество забавных чисел конечно.