XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Лига «Премьер». Финал. 19.09.2022.

1. Для каждого натурального n обозначим T_n наименьшую возможную сумму двух натуральных чисел, произведение которых равно n. Докажите, что для любого натурального k равенство $T_n = T_{n+k}$ выполнено при бесконечно многих натуральных n.

2. Дано три окружности ω_1, ω_2 и Γ по одну сторону от прямой l такие, что ω_1 и ω_2 касаются l в точках K и L и Γ в M и N соответственно. Известно также, что ω_1 и ω_2 не пересекаются и не равны. Окружность, проходящая через K и L, пересекает Γ в точках A и B. Пусть R и S — отражения M и N относительно l. Докажите, что A, B, R, S лежат на одной окружности.

3. Имеется доска $2n \times 2n$, клетки которой раскрашены в $2n^2$ цветов так, что в каждый цвет раскрашены ровно две клетки. В одной из клеток лежит шоколадка. Яна стартует в одной из клеток, и может перемещаться либо в соседнюю клетку, либо прыгнуть в клетку того же цвета, как та, где она находится. Причем ходы этих двух типов должны чередоваться, и первый ход должен быть прыжком. Всегда ли Яна сможет добраться до клетки с шоколадкой?

4. Для натурального n через $\mathrm{rad}(n)$ обозначается произведение всех простых чисел, делящих n; при этом $\mathrm{rad}(1) = 1$. Пусть $p > q > 2$ — простые числа. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана как
$$a_1 = a_2 = a, \qquad a_{n+2} = \frac{\mathrm{rad}(pa_n)}{p} + \frac{\mathrm{rad}(qa_{n+1})}{q} \quad \text{при } n \geq 1.$$
Оказалось, что эта последовательность периодична, то есть для некоторого T выполнено равенство $a_{n+T} = a_n$ при всех n. Докажите, что T делится на 3.

5. В картинной галерее по кругу стоят $2n$ галеристов, у каждого в руках картина. Каждый из людей обладает своей оценкой всех $2n$ картин (для каждого все картины линейно упорядочены). Если двум соседям картина другого нравится больше, они могут поменяться своими картинами. Найдите максимальное количество обменов, которые могут сделать галеристы.

6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены с вещественными коэффициентами такие, что степени обоих многочленов не более 2022 и верно равенство
$$(x+1)^{2023}P(x) + (x-1)^{2023}Q(x) = 1.$$
Чему может быть равен свободный член многочлена $Q(x)$?

7. Сад устроен так, что из каждых 7 деревьев 4 стоят в одном ряду. Докажите, что тогда либо, все кроме трех, стоят в одном ряду, либо все стоят в двух рядах.

8. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть I — точка пересечения его биссектрис, K — середина меньшей дуги BC его описанной окружности Ω. На касательной, проведенной к Ω в точке K, взята произвольная точка P. Прямая PI вторично пересекает окружность (PBC) в точке Q, причём точка I лежит на отрезке PQ. Докажите, что $\angle AQP + \angle QPK = 180°$.