XVII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Высшая старт-лига. Финал. 19.09.2022.

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle C = 140^\circ$. Докажите, что этот пятиугольник можно целиком накрыть кругом радиуса $\frac{2}{3}AD$.

2. Верно ли, что по множеству остатков, которые могут давать степени двойки при делении на нечётное натуральное число n, можно однозначно восстановить само число n?

3. Точка M — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. Точки D и E лежат на отрезках AC и BC соответственно так, что $\angle DME = 60^\circ$. Докажите, что $AD + BE = DE + \frac{1}{2}AB$.

4. Дано 100 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что эти точки можно занумеровать $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ таким образом, что для всех $1 < i < 100$ угол $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ острый.

5. *Смешиванием* последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{3n}$ будем называть превращение её в последовательность:

$$a_3, a_6, \ldots, a_{3n}, a_2, a_5, \ldots, a_{3n-1}, a_1, a_4, \ldots, a_{3n-2}.$$

Можно ли из последовательности $1, 2, \ldots, 192$ за несколько смешиваний получить последовательность $192, 191, \ldots, 1$?

6. В графе со 100 вершинами среди любых трёх вершин есть две несмежных, а среди любых десяти рёбер есть два имеющих общую вершину. Докажите, что в этом графе можно выбрать 83 попарно не смежных вершины.

7. Для положительных чисел a, b и c выполняется $(1 + ab)(1 + bc)(1 + ca) = 8$. Докажите неравенство $a + b + c \geqslant 3abc$.

8. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — вещественные числа такие, что

$$0 < |x_0| < |x_1| < \cdots < |x_{n-1}|.$$

Запишем на доску все 2^n сумм всех подмножеств множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ (сумму пустого множества условимся считать равной 0). Найдите все такие множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, для которых 2^n выписанных на доске чисел образуют (в некотором порядке) непостоянную арифметическую прогрессию (т.е. это числа вида $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (2^n - 1)d$ для некоторых вещественных a и $d \neq 0$).