Семнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ “Орлёнок”, 12-20.09.2022

Юниор-лига. Финал. 19.09.2022

1. Точки K и L выбраны внутри треугольника ABC, а точка D на стороне AB таким образом, что четырёхугольник $BKLC$ – вписанный, $\angle AKD = \angle BCK$ и $\angle ALD = \angle BCL$. Докажите, что $AK = AL$.

2. Для каждого натурального n обозначим T_n наименьшую возможную сумму двух натуральных чисел, произведение которых равно n. Докажите, что для любого натурального k равенство $T_n = T_{n+k}$ выполнено при бесконечно многих натуральных n.

3. На доске написано число $c \geqslant 1$. За один ход можно заменить число a на доске на любое число из промежутка $[a/2, a)$. Выигрывает тот игрок, кто своим ходом записал на доске число, меньшее 1. Кто выиграет при правильной игре (в зависимости от числа c)?

4. Дано 100 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что эти точки можно обозначить $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ таким образом, что для всех $1 < i < 100$ угол $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ острый.

5. *Смешиванием* последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{3n}$ будем называть превращение её в последовательность a_3, a_6, $\ldots$, a_{3n}, a_2, a_5, $\ldots$, a_{3n-1}, a_1, a_4,$\ldots$, a_{3n-2}. Можно ли из последовательности $1, 2, \ldots, 2400$ несколькими смешиваниями получить последовательность $2400, 2399, \ldots, 1$?

6. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $(1+ab)(1+bc)(1+ca) = 8$. Докажите, что $a + b + c \geqslant 2abc$.

7. В графе со 100 вершинами среди любых трёх вершин есть две несмежных, а среди любых десяти рёбер есть два имеющих общую вершину. Докажите, что в этом графе можно выбрать 86 попарно не смежных вершин.

8. Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC с тупым углом B. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведённая в точке C, пересекает прямую AB в точке P. Перпендикуляр, опущенный из точки P на прямую BC, пересекает прямую OC в точке Q. Докажите, что угол BAQ – прямой.