XVIII Южный математический турнир. ВДЦ "Орлёнок"
Командная олимпиада. Старшая группа. 19.09.2023

1. При каждом натуральном n положим $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Докажите, что $n + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = na_n$ при всех $n > 1$.

2. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100 в каком-то порядке. Известно, что числа в каждой строке возрастают слева направо, а числа в каждом столбце - сверху вниз. Все числа в таблице закрыты. Какое наименьшее количество чисел нужно открыть, чтобы заведомо определилась вся таблица?

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, углы которого не являются прямыми. Предположим, что на его сторонах AB, BC, CD, DA выбраны точки P, Q, R, S соответственно, такие, что $PS \| BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. Кроме того, предположим, что прямые PR, SQ и AC пересекаются в одной точке. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

4. Функция f определена на множестве всех вещественных чисел и принимает вещественные значения. При всех вещественных a и b выполнено неравенство

$$2f(a) \leqslant f(b) + f(2a - b).$$

Докажите, что при всех вещественных a, b и c

$$3f(a) \leqslant f(b) + f(c) + f(3a - b - c)?$$

5. Пусть q – нечетное простое число. Докажите, что среди $(q-1)$ чисел $1^2 + 1 + q, 2^2 + 2 + q, \dots, (q-1)^2 + (q-1) + q$ хотя бы одно не является произведением двух простых чисел (даже одинаковых).

6. Центр подготовки космонавтов хочет натренировать 10 экипажей из 4 человек каждый для отправки на Марс. У двух экипажей может быть не более одного общего члена. Какое наименьшее количество космонавтов нужно привлечь к подготовке?

7. Четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, пересекающимися в точке E, вписан в окружность ω. Пусть F — точка на отрезке AD, а P — точка пересечения луча FE с ω. Пусть Q — точка на отрезке PE такая, что $PQ \cdot PF = PE^2$, а R — точка на отрезке BC такая, что $QR \perp AD$. Докажите, что $PR = QR$.

8. Пусть $f(x)$ – непостоянный многочлен с целыми коэффициентами такой, что $f(1) \neq 1$. Для каждого натурального n обозначим $D(n)$ множество натуральных делителей числа n. Натуральное m назовём *f–классным*, если существует натуральное n, для которого $f(D(m)) = D(n)$ (то есть множество значений многочлена f на делителях m совпадает с множеством делителей n). Докажите, что множество f–классных натуральных чисел конечно.