

ХVIII Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Командная олимпиада. Юниор-лига. 19.09.2023.

1. Дан приведённый квадратный трёхчлен, имеющий два различных корня. Известно, что если уменьшить на единицу два его коэффициента, то получится квадратный трёхчлен, корни которого являются полусуммой и полуразностью корней исходного трёхчлена. Найдите исходный трёхчлен.

2. При каждом натуральном n положим

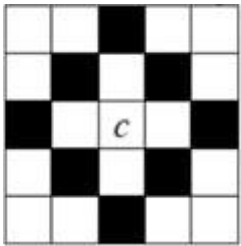
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Докажите, что

$$n + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = n \cdot a_n$$

при всех $n > 1$.

3. Точка M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$). Биссектриса угла CAB пересекается в точке P с прямой CP , перпендикулярной биссектрисе угла ACM . Найдите градусную меру угла ABP .



4. Фигура «снежинка» бьёт клетки таким образом, как показано на рисунке. Какое максимальное количество не бьющих друг друга снежинок можно разместить на доске 8×8 ?

5. Найдите все простые числа p такие, что значение выражения

$$(x+y)^{19} - x^{19} - y^{19}$$

кратно p при любых целочисленных значениях x и y .

6. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$ такой, что $BC = DE$ и $AB \parallel DE$. Пусть X , Y , и Z – середины отрезков BD , CE и AE соответственно. Докажите, что AE касается описанной окружности треугольника XYZ .

7. Пусть q – нечетное простое число. Докажите, что среди $(q-1)$ чисел

$$1^2+1+q, 2^2+2+q, \dots, (q-1)^2+(q-1)+q$$

хотя бы одно не является произведением двух простых чисел (даже одинаковых).

8. Центр подготовки космонавтов хочет натренировать 10 экипажей из 4 человек каждый для отправки на Марс. У двух экипажей может быть не более одного общего члена. Какое наименьшее количество космонавтов нужно привлечь к подготовке?