XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орленок»

Командная олимпиада. Сеньоры. 21.09.2025.

1. Имеется n сортов, по m конфет каждого сорта. Петя разложил их в n корзин по m штук. Петя утверждает, что в каждой корзине представлены конфеты ровно двух сортов, и кроме того он может достать три конфеты своего любимого сорта из разных корзин. Могут ли слова Пети оказаться правдой?

2. Найдите все множества вещественных чисел S такие, что

   (i) наименьший элемент S равен 1;

   (ii) Для любых $x, y \in S$ таких, что $x > y$, число $\sqrt{x^2 - y^2}$ также лежит в S.

3. Диагонали выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке T под углами $60°$. Известно, что $S_{TAB} + S_{TCD} + S_{TEF} = S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TFA}$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A, C, E соответственно на FB, DF, BD, пересекаются в одной точке.

4. Петя выбирает 100000 чисел из отрезка $[1,\ 1000]$. Вася хочет выбрать из них $3k$ чисел и разбить на k троек так, чтобы для каждой тройки существовал треугольник с длинами сторон, равными числам в этой тройке. При каком наибольшем k Вася сможет это сделать независимо от действий Пети?

5. Дано простое число $p > 2$ и целое число k, такое что $0 < k < p-1$. Докажите, что существует ровно $(p-1)/2$ пар целых чисел a и b таких, что $0 < a < b < p$ и $[pa/b] = k$.

6. Найдите наименьшее натуральное число n, такое что существуют вещественные числа $a_0, a_1, \ldots, a_{2n} \in [2024, 2025]$, такие, что уравнение $a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ имеет вещественный корень.

7. В треугольнике ABC окружность касается отрезков AB, BC и окружности (ABC) в точках X, Y, Z соответственно. Точки A', C' изогонально сопряжены точкам A, C в треугольнике XYZ. Докажите, что $BA' = BC'$.

8. Дано натуральное $n > 1000$. У Шарки есть коллекция из 2^n полосок бумаги размером $n \times 1$, каждая из которых разделена на n клеток. Каждая клетка на полоске окрашена в черный или белый цвет, так что все полоски различны. Найдите наименьшее m такое, что для любых m полосок Шарки может выбрать n из этих полосок и расположить их (не переворачивая ни одну из полосок) в квадрате размером $n \times n$ так, что диагональ полученного квадрата, ведущая из левого нижнего угла в правый верхний, является одноцветной.