XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Командная олимпиада. Юниоры. 21.09.2025.

1. Несколько исследователей наблюдают за группой из пятидесяти шмелей, жужжащих на цветущем песчаном берегу. Они с восторгом отмечают, что каждый шмель собрал пыльцу ровно с четырёх цветков, причем для разных шмелей эти четвёрки цветков различны. Исследователи также зафиксировали, что 50 шмелей посетили один и тот же цветок гипсофилы. Докажите, что шмели собирали пыльцу как минимум с 9 разных цветков.

2. На круглом подносе стоят три тарелки диаметров 15 см, 14 см, и 6 см. Каждая тарелка касается двух остальных и края подноса. Определите диаметр подноса.

3. Петя выбирает 100000 чисел из отрезка $[1,\ 1000]$. Вася хочет выбрать из них $3k$ чисел и разбить на k троек так, чтобы для каждой тройки существовал треугольник с длинами сторон, равными числам в этой тройке. При каком наибольшем k Вася сможет это сделать независимо от действий Пети?

4. Пусть $a, b, c \geq 0, a+b+c=3$. Докажите, что $a+ab+\frac{47}{20}abc+bc+3c \leq 9$.

5. Существует ли точный куб, запись которого в 99-ричной системе счисления состоит из 2023 цифр «1» и 2023 цифр «0»?

6. Пусть p — простое, a, b, и c — натуральные. Докажите, что если $a+b+c$ и $a^2+b^2+c^2$ делятся на p, то $a^5+b^5+c^5$ кратно p.

7. Диагонали выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке T под углами $60°$. Известно, что $S_{TAB}+S_{TCD}+S_{TEF}=S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TFA}$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A, C, E соответственно на FB, DF, BD, пересекаются в одной точке.

8. Дано простое число $p>2$ и целое число k, такое что $0<k<p-1$. Докажите, что существует ровно $(p-1)/2$ пар целых чисел a и b таких, что $0<a<b<p$ и $[pa/b]=k$.