XX Южный математический турнир. ВДЦ «Орлёнок»

Первый тур. Гранд. 22.09.2025.

1. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили точки I_b и I_c — центры вневписанных окружностей напротив вершин B и C соответственно. Пусть D — проекция точки A на прямую BC. Точка X — ортоцентр треугольника I_bI_cD. Пусть Y и Z — точки пересечения прямой BC с прямыми I_bX и I_cX соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются. (С. Чуев)

2. Пусть ABC — остроугольный треугольник, такой что $\angle BAC = 59°$. Пусть X — точка внутри треугольника ABC, такая что для любых точек P и Q на стороне BC выполнено неравенство $\angle PXQ \geq \angle PAQ$. Найдите максимальное возможное значение угла BXC.

3. Для перестановки π множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ назовем индекс $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *обрывом*, если $\pi(i) > \pi(i+1)$. Обозначим число обрывов перестановки π через $f(\pi)$. Найдите $\sum\limits_{\pi} f(\pi^2)$.

   (Сумма берется по всем $n!$ перестановкам. По определению, π^2 — перестановка такая, что $\pi^2(i) = \pi(\pi(i))$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.)

4. Вначале Петя рисует дерево с 10 вершинами. Вася хочет расставить в вершинах этого дерева 10 многочленов (с вещественными коэффициентами) так, чтобы графики любых двух многочленов пересекались тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины в дереве соединены ребром. Сможет ли Вася добиться желаемого независимо от Петиного дерева? (М. Дидин)

5. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

   $$|f(x)f(y)f(f(x) - f(y))| = |x^2 f(y) - y^2 f(x)|$$

   для всех действительных чисел x, y.

6. У Коли есть 100 сундуков с сокровищами, 98 из которых содержат золото, а 2 — серебро. Известно, что сундуки, содержащие одинаковые металлы, весят одинаково, а сундук с золотом тяжелее сундука с серебром. У Коли есть весы, которые позволяют ему сравнивать вес двух сундуков с сокровищами, чтобы определить, какой из них тяжелее, или выяснить, что они весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний он гарантированно сможет определить, какие 2 сундука содержат серебро?

7. Определите, верно ли следующее утверждение: «для каждого многочлена P степени не менее 2 с неотрицательными целыми коэффициентами: существует натуральное число m, такое что для бесконечно многих натуральных чисел n число $\underbrace{P(P(\ldots P(m)\ldots))}_{n \text{ букв } P}$ имеет более чем n различных натуральных делителей».

8. Пусть b_n — последняя ненулевая цифра $n!$. Найдите все цифры, которые бесконечное количество раз повторяются в последовательности $b_1, b_2, b_3, \ldots$

9. В полном графе с 2025 вершинами каждое ребро окрашено в один из цветов r_1, r_2 или r_3. Для каждого $i = 1, 2, 3$ все вершины графа можно разделить на a_i групп таким образом, что любые две вершины, соединенные ребром цвета r_i, находятся в разных группах. Найдите минимально возможное значение $a_1 + a_2 + a_3$.

10. Соня расставила по кругу 100 красных и 2000 синих жемчужин. Назовем *блоком* набор одноцветных жемчужин, стоящих в кругу подряд, ограниченный с обоих концов жемчужинами другого цвета. Раз в минуту каждый блок, соседствующий с блоком хотя бы вдвое большего размера, перекрашивается в другой цвет. Может ли Соня придумать такую начальную расстановку, чтобы в какой-то момент все жемчужины стали красными? (Л. Шатунов)